**1.1 Α. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

**ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΟΥΣ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 14 -16**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1 .**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας ‘x’ στην κατάλληλη θέση

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 |  | 6 | 0, | 0,8 |  |  | 3,14 | π |  |
| Ακέραιος | x |  | x |  |  |  | x |  |  |  |
| Ρητός | x | x | x | x | x |  | x | x |  | x |
| Άρρητος |  |  |  |  |  | x |  |  | x |  |

**2.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** 3 + 7 = 4 **β)** 6 + 6 = 0 **γ)** 29 =11 **δ)** (2)⋅  =

**ε)** 0⋅= 0 **στ)**  =1 **ζ)** (6 ) :  = 

**η)** : (+ 4) = **θ)** := 1

**3.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** (3 ⋅ 2 5)x = … **β)** 3(25x) = … **γ)** 3(25)x = ….

**δ)** 2(x⋅⋅⋅….) = …. + 6 **ε)** ( 3 + x )(2 + y ) = … **στ)** 4(….+ …) = 12x + 8

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (3 ⋅ 2 5)x = (65)x = 11x

**β)** 3(25x) = 6 + 15x

**γ)** 3(25)x =3(3)x = 9x

**δ)** 2(x3) = 2x + 6

**ε)** (3 + x )(2 + y ) = 6 + 3y + 2x + xy

**στ)** 4(3x.+ 2) = 12x + 8

**4.**

Να επιλέξτε την σωστή απάντηση

**i)** Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι τότε

α) είναι ομόσημοι β) έχουν ίσες απόλυτες τιμές

γ) έχουν γινόμενο μηδέν δ) έχουν γινόμενο την μονάδα

**ii)** Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι τότε

α) είναι ετερόσημοι β) έχουν άθροισμα μηδέν

γ) έχουν ίσες απόλυτες τιμές δ) έχουν γινόμενο την μονάδα

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** Σωστό το β

**ii)** Σωστό το δ

**5.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

**α)** Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι

**β)** Το άθροισμα δύο ομοσήμων είναι θετικός

**γ)** Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός

**δ)** Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί

**Προτεινόμενη λύση**

α. (Σ) β. (Λ) γ. (Λ) δ. (Σ)

**Ασκήσεις**

**1.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** 2 + 3⋅ 4 12:( 4) + 1 **β)** 2 + 3( 412) :( 4 + 1)

**γ)** 3(2) 5 + 4 : (2) 6 **δ)** 8 :( 3 + 5) 4(2 + 6)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 2 + 3⋅ 4 12:( 4) + 1 = 2 + 12 + 3 + 1= 18

**β)** 2 + 3( 412) : ( 4 + 1) = 2 + 3(8) : (3) =

= 2 + (24):( 3) =

= 2 + 8 = 10

**γ)** 3(2) 5 + 4 : (2) 6 = 65 26 = 7

**δ)** 8 :( 3 + 5) 4(2 + 6) = 8 : 24⋅4 =

= 416 = 20

**2.**

Τα αποτελέσματα των πράξεων σχηματίζουν το έτος που έγινε ένα γεγονός στην

χώρα μας με παγκόσμιο ενδιαφέρον.

(54) ( + 2) + (6 + 4) (7) = ….

4(2 + 63) + (9 + 6) = ….

14 + (6 + 53) (41)( 2) = …

(3)( 2) + 4 ( + 5) (1): (1) = …

**Προτεινόμενη λύση**

(54) ( + 2) + (6 + 4) (7) = 1( + 2) + (2) (7) =

= 1 2 2 + 7 =

= 2

4(2 + 63) + (9 + 6) = 4( + 1) + (3) =

= 413 =

= 0

14 + (6 + 53) (41)( 2) = 14 + (4) (5) (2) =

= 14410 =

= 0

(3)( 2) + 4 ( + 5) (1): (1) = 6 + 4 5( + 1)

= 6 + 4 51 =

= 4

Ζητούμενο έτος : 2004

Είναι το έτος τέλεσης των Ολυμπιακών αγώνων στην Ελλάδα

**3.**

Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την θέση Ο, κινήθηκε πάνω στον άξονα x΄x προς

τα αριστερά στην θέση Β και στη συνέχεια προς τα δεξιά στη θέση Γ. Αν είναι

ΟΑ = 5 km, τότε να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσε το αυτοκίνητο και πόσο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση.



**Προτεινόμενη λύση**

Το διάστημα που διήνυσε το αυτοκίνητο είναι το ΟΒ + ΒΓ = 4ΟΑ + 9ΟΑ =

= 13ΟΑ = 13⋅5 =

= 65km

Το αυτοκίνητο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση κατά την απόσταση

ΟΓ = 5ΟΑ = 5⋅5 = 25 km

**4.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)** +  **β)**  +

**γ)** 5⋅5 **δ)** :

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** +  =  + =

=  + =

=  = 

**β)**  +=  +  + =

=  =

= 221 = 1

**γ)** 5⋅5 =  + =

=  +  =

= 5 +  =

= +  = 

**δ)** := :=

= :=

= ⋅  =

=  = = 

**5.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)** 7 + 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  =  =  =  =  = 

**β)**  =  =  =  =  = 

**γ)** 7 +  = 7 +  = 7 +  = 7 +  = 7 + 2 = 5

**6.**

Οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης το πρώτο δεκαήμερο του έτους ήταν

1, 3, 0, 2, 1, 2, 5, 0, 3, 1. Να βρείτε την μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης στο δεκαήμερο αυτό .

**Προτεινόμενη λύση**

Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης είναι ίση με

 = =

= = 1

**7.**

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το

κατάλληλο σύμβολο ( + ή )

**α)** 12…5….20 = 3 **β)** 8…9…1 = 0

**γ)** …… = 3 **δ)** 0,35…6,15…8,50 = 2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 12…5….20 = 3 → 12 + 5 20 = 3

**β)** 8…9…1 = 0 → 8 + 91 = 0

**γ)**  …… = 3 → + = 3

**δ)** 0,35…6,15…8,50 = 2 → 0,356,15 + 8,50 = 2

**8.**

Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

**α)** 8(αβ) + ( α5β) = 3

**β)** 2(α + β γ) ( 4 + γ β) (2α) = 0

**γ)** 2(α3) + α(7 + 9 ) 3( + 2) = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 8(αβ) + ( α5β) = 8α + β + α 5β =

= 3 = 3

**β)** 2(α + β γ) ( 4 + γ β) (2α) =

= 2αβ + γ 4 γ + β + 2 + α =

= 2 4   + 2 = 0

**γ)** 2(α3) + α(7 + 9 ) 3( + 2) =  = 0

**9.**

Αν x + y = 5 και ω + φ = 7, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

Α = 4 (xω) (yφ) Β = (5x + φ) +(8 + y) (ω4)

**Προτεινόμενη λύση**

Α = 4 (xω) (yφ) = 4x + ω y + φ =

= 4 ( x + y) + ( ω + φ) =

= 4(5) + (7) =

= 4 + 57 = 2

Β = (5x + φ) + (8 + y) (ω4) = 5 + xφ 8 + yω + 4 =

= 1 + ( x + y) (φ + ω) =

=1 + (5) (7) =

= 15 + 7 = 3

**10.**

Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο 56 και γ , δ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου που έχει περίμετρο 32 , να υπολογίσετε την

παράσταση Α = α(92γ) (15β 2δ)

**Προτεινόμενη λύση**

Α = α(92γ) (15β 2δ) = α9 + 2γ 15 + β + 2δ =

= (α + β) 24 + ( 2γ + 2δ) **(1)**



Όμως από την υπόθεση είναι 2α + 2β = 56 οπότε α + β = 28

και 2γ + 2δ = 32

Η (1) γίνεται Α = 2824 + 32 = 36

**11.**

Τοποθετήστε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς

7, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 5, 9

σε ένα τετράγωνο, ώστε τα τρία αθροίσματα να είναι

ίσα μεταξύ τους.



**Προτεινόμενη λύση**



**1.1 Β. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 18 – 19**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

**α)** Για κάθε αριθμό α ισχύει α + α + α + α = α4

**β)** Για κάθε αριθμό α ισχύει α ⋅ α ⋅ α ⋅ α = α4

**γ)** Οι αριθμοί (5)6  και 56 είναι αντίθετοι

**δ)** Οι αριθμοί  και  είναι αντίστροφοι

**ε)** Για κάθε αριθμό α ισχύει (3α)2 = 9α2

**στ)** Ο αριθμός (5)2 είναι θετικός

**ζ)** Ο αριθμός  είναι θετικός

**Προτεινόμενη λύση**

α. (Λ) β. (Σ) γ. (Σ) δ. (Σ) ε. (Σ) στ. (Λ) ζ. (Λ)

**2.**

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο = ή ≠

**α)** (1) 6 … 1 **β)** … 9 **γ)** 42 …16 **δ)** … 

**ε)** …  **στ)** … 0 **ζ)** …  **η)** (7 + 2) 2 … 72 + 22

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (1) 6 = (1) (1) (1) (1) (1) (1) = 1 άρα (1) 6 = 1

**β)** ==  άρα ≠ 9

**γ)** 42 = 16 άρα 42 = 16

**δ)** = = άρα = 

**ε)** ==  άρα ≠ 

**στ)** = 1 άρα ≠ 0

**ζ)** =  =  άρα ≠ 

**η)** ( 7 + 2) 2 = 92= 81 και 72 + 22 = 49 + 4 = 53 άρα (7 + 2) 2 ≠ 72 + 22

**3.**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

**i)** Η τιμή της παράστασης  είναι α)  β)  γ)  δ) 

**ii)** Η τιμή της παράστασης  είναι α) 23 β) 6 γ) 23 δ) 1

**iii)** Η τιμή της παράστασης 23 + 32 είναι α) 55 β) 17 γ) 56 δ) 65

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** ==  άρα σωστό το (γ)

**ii)** = (1)3 = 1 άρα σωστό το (δ)

**iii)** 23 + 32 = 8 + 9 = 17 άρα σωστό το (β)

**4.**

Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α το αποτέλεσμα της στήλης Β

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| **α.** | **1.** |
| **β.** ⋅ 210 | **2.** 24 |
| **γ.** | **3.** 4 |
| **δ.** (24 : 23) ⋅22 | **4.** 23 |
|  | **5.** |
|  | **6.** 1 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| α | β | γ | δ |
| 5 | 6 | 1 | 4 |

**Προτεινόμενη λύση**

**α.**  =  =  επομένως α → 5

**β.** ⋅ 210  = ⋅ 210 = 20= 1 επομένως β → 6

**γ.**  =  =  επομένως γ → 1

**δ.** (24 : 23) ⋅22  = ⋅22  = 2⋅22  = 23 επομένως δ → 4

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

**Ασκήσεις**

**1.**

Να γράψετε κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη

**α)** ⋅ 28 **β)** 3 4:  **γ)** 23⋅ 53  **δ)** 

**ε)** ⋅(3 )4 **στ)**  **ζ)** 42 : 34 **η)** 27 ⋅ 34⋅

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ⋅ 28 = = 23

**β)** 3 4:  = = 3 4 + 2 = 36

**γ)** 23⋅ 53 = (2⋅ 5)3 = 103

**δ)** =  = 58

**ε)** ⋅(3 )4 = ⋅34 = = 32

**στ)** = = (3 )6 =36

**ζ)** 42 : 34 = (22)2 : 34 = 24: 34 = (2:3)4 =

**η)** 27 ⋅ 34⋅ = 33⋅ 34⋅=  = 32

**2.**

Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης

**α)** ()3⋅ 28 **β)** (3) 2 ⋅( **γ)**  **δ)** 363 : (12)3

**ε)** (2,5)4 ⋅(4 )4  **στ)** 412: 220 **ζ)**  **η)** (0,01)3⋅ 105

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ()3⋅ 28 =  ⋅ 28 =  = 4

**β)** (3) 2 ⋅ ( =(=  = 

**γ)**  = = 0,75 0 = 1

**δ)** 363 : (12)3  = [36: (12)]3 = (3)3 = 27

**ε)** (2,5)4 ⋅(4 )4 = [2,5(4 )]4 = (10)4 = 10000

**στ)** 412: 220 = (22)12: 220 = 224: 220 = 24 = 16

**ζ)** = =  = = 

**η)** (0,01)3⋅ 105  = [=⋅105 = = 

**3.**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** (x2) 3⋅ 5x4 **β)** (xy3)2 ⋅x3y **γ)** (2x)2⋅ (2x2)

**δ)**  **ε)** (3x2)3 ⋅ (2x3)2 **στ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x2) 3⋅ 5x4 = x6⋅ 5x4 = 5x10

**β)** (xy3)2 ⋅x3y = (x2y6) ⋅x3y = x2y6 ⋅x3y = x5y7

**γ)** (2x)2⋅ (2x2) = 4x2 ⋅ (2x2) = 8x4

**δ)**  =  = x

**ε)** (3x2)3 ⋅ (2x3)2 = 27x6⋅4x6 = 108x12

**στ)** = x3 : x2 = ⋅ x3:x2 = x

**4.**

Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης

Α = 3⋅(2 )2  + 4(7)0⋅28(1) 2⋅32 Β = (4)2 :2 5(3)⋅22(2)4

Γ = (2,5) 2 ⋅(1,25) 3 ⋅ (4)2 ⋅ (8)3 Δ= (257⋅84): (57⋅ 404)

**Προτεινόμενη λύση**

Α = 3⋅(2 )2  + 4(7)0⋅28(1) 2⋅32 =

= 3⋅ 4 + 41⋅2 8 2⋅9 =

= 12 + 42818 =

=12 + 42818 =

=12 + 42 + 4 18 = 0

Β = (4)2 :2 5(3)⋅22(2)4 = 16 :2 5(3)⋅4 16 =

= 85 + 12 16 = 1

Γ = (2,5) 2 ⋅(1,25) 3 ⋅ (4)2 ⋅ (8)3 = [2,5(4)]2 ⋅ [1,25(8)]3 =

= (10)2(10)3

= (10)5 =100000

Δ = (257⋅84): (57⋅ 404) =  = ⋅ =  ⋅ =

= 57⋅= 57⋅ = 53  = 125

**5.**

Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω ένα τετράγωνο με πλευρά α. Τότε το εμβαδόν του είναι Ε = α2

Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του, αυτή θα γίνει 3α και το εμβαδόν

Ε΄= (3α) 2 = 9α2 = 9Ε

Συνεπώς το εμβαδόν θα εννεαπλασιαστεί.

**1.1 Γ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ**

**ΑΡΙΘΜΟΥ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 22 – 24**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** 3 + = … **β)**  53 **γ)**  + 4 5= ….

**δ)** ⋅= …. **ε)** : **στ)** 3⋅

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 3 + = ( 3 + 1) = 4

**β)** 53= (5 3) = 2

**γ)**  + 4 5= ( 1 + 45)  = 0

**δ)** ⋅= =  = 6

**ε)** :=  =  = 3

**στ)** 3⋅ = 3 = 3 = 3⋅4 = 12

**2.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από την στήλη Β

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. | 1. 5 |
| β. |
| γ. | 2. Δεν ορίζεται |
| δ. |
| ε. | 3. 5 |
| στ. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | β | γ | δ | ε | στ |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 |

**Προτεινόμενη λύση**

α.  = 5 επομένως α → 3

β.  Δεν ορίζεται επομένως β → 2

γ.  = 5 επομένως γ → 1

δ. = 5 επομένως δ → 3

ε. = = 5 επομένως ε → 3

στ. = Δεν ορίζεται επομένως στ → 2

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παραπάνω

**3.**

Να συμπληρώσετε τους πίνακες

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Αθροισμα | | Γινόμενο | | Πηλίκο | |
| α | β |  |  |  | + |  | ⋅ |  |  |
| 4 | 1 | 2 | 1 |  | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | 16 | 3 | 4 | 5 | 7 | 12 | 12 |  |  |
| 64 | 36 | 8 | 6 | 10 | 14 | 48 | 48 |  |  |

**Προτεινόμενη λύση**

 Όταν α = 4 και β = 1, τότε =  = 2 και =  = 1

Άθροισμα :  = = 

+= 2 + 1 = 3

Γινόμενο: = = = 2

⋅= 2⋅1 = 2

Πηλίκο :  = = = 2

 =  = 2

 Όταν α = 9 και β = 16, τότε =  = 3 και =  = 4

Άθροισμα : = =  = 5

+= 3 + 4 = 7

Γινόμενο: = = = 12

⋅= 3⋅4 = 12

Πηλίκο :  = =

 = 

 Όταν α = 64 και β = 36, τότε =  = 8 και =  = 6

Άθροισμα : = =  = 10

+= 8 + 6 = 14

Γινόμενο: = = = 48

⋅= 8⋅6 = 48

Πηλίκο :  = =

 = 

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παραπάνω.

Παρατήρηση :

Από τον πίνακα φαίνεται ότι ισχύουν οι γνωστές από την θεωρία σχέσεις

≠ + ,  = ⋅ ,  = 

**4.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** ⋅ = 

**β)**  +  = 

**γ)**  = 

**δ)** = 3

**ε)** = 1

**στ)** Το διπλάσιο του  είναι το 

**ζ)** Το μισό του είναι το 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ⋅ =  = άρα (Σ)

**β)**  +  ≠ =  άρα (Λ)

**γ)**  = =  άρα (Σ)

**δ)** = = 3 άρα (Σ)

**ε)** = = =  ≠ 1 =  άρα (Λ)

**στ)** Το διπλάσιο του  είναι το 2 ≠ =  άρα (Λ)

**ζ)** Το μισό του  είναι το  =  =  = =  άρα (Σ)

**5.**

Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50m2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του

είναι 5m;

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά 5m είναι ίσο με

Ε =  = 25⋅ 2 = 50 m2 συνεπώς ο ισχυρισμός είναι σωστός

**Ασκήσεις**

**1.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)** 37 + 2 **β)** 582 + 4

**γ)** ⋅⋅ **δ)** ⋅ + ⋅

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 37 + 2 = (37 + 2)  = 2

**β)** 582 + 4 = (52)  + (8 + 4)  = 34

**γ)** ⋅⋅ = =

=   =

=  =  = 

**δ)** ⋅ + ⋅ = + =

=  +  = 2 + 7 = 9

**2.**

Να αποδείξετε τις ισότητες

**α)** 3 + 6= 10 **β)**  + = 53

**γ)** ⋅⋅ +  =  **δ)** ⋅⋅= 3,8

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 3 + 6 = 3 + 6=

= 3⋅ + ⋅6⋅=

= 35 + 412 =

= 10

**β)**  +  =  + =

=  + =

= 3 + =

= 53

**γ)** ⋅⋅ +  = ⋅⋅ +  =

= ⋅⋅ +  =

= 34 + 2=

=

**δ)** ⋅⋅= ⋅⋅

=⋅⋅ =

= ⋅⋅ =

=⋅⋅ =

= =

= == 3,8

**3.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  = == 4

**β)**  ==

=  =

=  =  = 10

**γ)** = =

==

=

== == 6

**4.**

Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις περιμέτρους και τα εμβαδά των ορθογωνίων ΑΒΓΔ , ΕΖΗΘ και ΚΛΜΝ . Ποιο από τα ορθογώνια έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ;

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Μήκος | Πλάτος | Περίμετρος | Εμβαδόν |
| ΑΒΓΔ | 5 |  | 12 | 10 |
| ΕΖΗΘ | 4 | 2 | 12 | 16 |
| ΚΛΜΝ | 3 | 3 | 12 | 18 |

**Προτεινόμενη λύση**

Περίμετρος

ΑΒΓΔ : Π1= 2(5) + 2= 10+ 2= 12

ΕΖΗΘ : Π2 = 2(4) +2( 2) = 8+ 4= 12

ΚΛΜΝ: Π3= 2(3) + 2(3)= 6+ 6= 12

Εμβαδόν

ΑΒΓΔ : Ε1= (5)⋅= 5()2 = 5⋅2 = 10

ΕΖΗΘ : Ε2= (4)⋅(2) = 8()2 = 8⋅2 = 16

ΚΛΜΝ : Ε3= (3)⋅(3) = 9()2 = 9⋅2 = 18

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παραπάνω

Το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το ΚΛΜΝ

**5.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** (+) **β)** 

**γ)** (): **δ)** ()( + )

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (+) =  +  = +  = 6 + 4 = 10

**β)** =   =   =

=  =

=⋅  =

= 9 3= 6

**γ)** ():==

=  +  =

=  + =

=  + =

= + =

**δ)** ()( + ) = ()2 +  ()2 =7 5 = 2

**6.**

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** = = 

**β)** = ==

**γ)**  = = =

**δ)**  = = =

= = =  = 2 +

**7.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  + x = 3x **β)** x =  **γ)**  =  **δ)** 3x = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  + x = 3x άρα x + x =3

2x = 2

x = = 

**β)** x =  άρα x =  = = = 2

**γ)**  =  άρα x = ⋅ =  = = 8

**δ)** 3x =  άρα 3= x

3= x

3= x

33= x

x = 0

**8.**

Να αποδείξετε ότι (1)(  +1) = 2 . Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισότητα να μετατρέψετε το κλάσμα που έχει άρρητο παρονομαστή σε

ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

**Προτεινόμενη λύση**

(1)( +1) = ()2 + 1 = 31 = 2 **(1)**

 =   

**9.**

8 m

2

50 m

2

Η

Ζ

Ε

Ι

Θ

Δ

Γ

Β

Α

Αν τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ έχουν

εμβαδόν 50 m2 και 8m2 αντίστοιχα ,

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του

τετραγώνου ΒΘΙΕ είναι 98 m2 .

**Προτεινόμενη λύση**

(ΑΒΓΔ) = 50 άρα ΒΓ2 = 50

ΒΓ =  =

=  =

= = 5

(ΓΕΖΗ) = 8 άρα ΓΕ2 = 8

ΓΕ = = = = 2

Αλλά ΒΕ = ΒΓ + ΓΕ άρα ΒΕ = 5 + 2 = 7

Οπότε (ΒΘΙΕ) = (7)2 = 49⋅2 = 98 m2

**10.**

Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 3cm και ΑΓ= 6 cm

ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε

αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε

ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 1cm.

Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 3ΔΕ

**Προτεινόμενη λύση**

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο

τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

ΒΓ2 = ΑΒ2 + ΑΓ2 = 32 + 62 = 45

Άρα ΒΓ = == = 3 **(1)**

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε

ΕΔ2 = ΑΕ2 + ΑΔ2 = 12 + 22 = 5

Άρα ΔΕ = **(2)**

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΒΓ = 3ΔΕ

**11.**

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ)

το ύψος ΑΔ = 4 cm και η πλευρά ΒΓ = 4cm.

**α)** Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη

συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος

του τριγώνου ΑΒΓ είναι 4 + 4cm

**β)** Στην προηγούμενη ερώτηση, 4 μαθητές

έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις :

4 + , 4 + 2 , 8 και 2(2 + )

Ποιες από αυτές είναι σωστές ;

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και διάμεσος,

άρα ΔΓ = 2cm

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

ΑΓ2 = ΑΔ2 + ΔΓ2 = 42 + 22 = 20, άρα ΑΓ == = = 2

οπότε και ΑΒ = 2

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι Π = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ =

= 2+ 4 + 2=

= 4 + 4

**β)**

Αν γράψουμε το μήκος των ΑΓ = = ΑΒ τότε

Η περίμετρος γράφεται Π = + 4 + = 4 + 2 = 2(2 + )

δηλαδή σωστές απαντήσεις είναι οι : 4 + 2 και 2(2 + )

**1.2 Α. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ –**

**ΜΟΝΩΝΥΜΑ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 27 – 29**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα ;

**α)** 3x2y **β)** 3 + x2 y **γ)**  **δ)** 2x2yω3 **ε)** (3 )αβ3 **στ)** αβγ3

**Προτεινόμενη λύση**

Μονώνυμα είναι οι : **(α), (δ), (ε), (στ)**

Το **(β)** δεν είναι αφού, έχουμε άθροισμα ανόμοιων μεταβλητών.

Το **(γ)** δεν είναι αφού έχουμε και διαίρεση μεταξύ ανόμοιων μεταβλητών

**2.**

Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια ;

**α)** 6x2y2 **β)** x y3 **γ)** x3yω **δ)** 5y3x **ε)**  **στ)** y2x2

**ζ)**  **η)** x2y2 **θ)** yx3ω **ι)** xy3

**Προτεινόμενη λύση**

Όμοια είναι τα : **(α) , (στ) , (η)** με κύριο μέρος x2y2

**(β) , (δ) , (ζ) , (ι)** με κύριο μέρος xy3

**(γ) , (ε) , (θ)** με κύριο μέρος x3yω

**3.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Μονώνυμο | Συντελεστής | Κύριο  μέρος | Βαθμός  ως προς x | Βαθμός  ως προς y | Βαθμός  ως προς x και y |
| 5xy4 | 5 | xy4 | 1ου | 4ου | 5ου |
| xy2 | 1 | xy2 | 1ου | 2ου | 3ου |
| x2y5 |  | x2y5 | 2ου | 5ου | 7ου |
| x4 |  | x4 | 4ου | 0ου | 4ου |

**Προτεινόμενη λύση**

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

**4.**

Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή  και κύριο μέρος xy2ω3. Να βρείτε το ίσο του και το αντίθετό του μονώνυμο.

**Προτεινόμενη λύση**

Ίσο μονώνυμο με το δοσμένο είναι το  xy2ω3

Αντίθετο του δοσμένου είναι το xy2ω3

**5.**

Να λύσετε το σταυρόλεξο

Οριζόντια Κάθετα

1. Έκφραση που περιέχει αριθμούς και 1. Το μονώνυμο αυτό δεν έχει βαθμό

μεταβλητές συνδεόμενες με τα σύμβολα 2. Στο μονώνυμο 7x4yω5 ως προ x

των πράξεων (δύο λέξεις) είναι 4

2.Είναι τα μονώνυμα 8 , 5 , 0 , 3 3. Παράσταση που μεταξύ των

3. Είναι ο βαθμός του μονωνύμου μεταβλητών της σημειώνονται μόνο

3x2ω ως προς y οι πράξεις της πρόσθεσης και του

4. Στο μονώνυμο 2x2y είναι το 2 πολλαπλασιασμού .

5. Είναι τα μονώνυμα x3y , 3x3y 4.Είναι τα μονώνυμα 5xy2, xy2

6. O συντελεστής του μονωνύμου xy 5. Είναι τα μονώνυμα 4α2β5, α2β5

7. Είναι το xyω2 στο μονώνυμο 4xyω2  6. Η … του μονωνύμου 2x2y για

(δύο λέξεις) x = 2 και y = 1 είναι 8

8 . Η απλούστερη αλγεβρική παράσταση 7. Είναι ο βαθμός των σταθερών

μονωνύμων 6 , 3 και 7

8. Η πράξη αυτή δεν σημειώνεται

μεταξύ των μεταβλητών ενός

μονωνύμου

**Προτεινόμενη λύση**

Στο 8 κάθετα μπορεί να μπει και η λέξη : Αφαίρεση

**Ασκήσεις**

**1.**

Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων

**α)**  + x2y 4 για x = 2 και y = 1

**β)**  + ω3 για x = 3 και ω = 2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  + (2)21 4 = 4⋅1 + 4⋅14 = 4 + 4 4 = 4

**β)**  + (2)3 =  + (8) = 84 = 4

**2.**

Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή  και μεταβλητές α και β. Να προσδιορίσετε το

μονώνυμο αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς α και β είναι 5.

**Προτεινόμενη λύση**

Το μονώνυμο θα είναι της μορφής  ακ βλ με κ, λ φυσικούς.

Αφού είναι 2ου βαθμού ως προς α, θα έχουμε κ =2

Αφού είναι 5ου βαθμού ως προς α και β, θα έχουμε κ + λ = 5

2 + λ = 5

λ = 3

Συνεπώς το ζητούμενο μονώνυμο είναι το  α2 β3

**3.**

Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο 3xνy2

**α)** Να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x

**β)** Να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y

**γ)** Να έχει αριθμητική τιμή 48 για x = 2 και y =1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Θα πρέπει ν = 0

**β)** Θα πρέπει ν + 2 = 5 άρα ν = 3

**γ)** Θα πρέπει 3⋅2ν⋅(1)2 = 48

3⋅2ν⋅1 = 48

2ν = 16 άρα ν = 4

**4.**

Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ν ώστε τα μονώνυμα 4x3yν, λ xκ y 2 να είναι

**α)** όμοια **β)** ίσα **γ)** αντίθετα

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Πρέπει κ = 3 και ν = 2 και λ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

**β)** Πρέπει κ = 3 και ν = 2 και λ = 4

**γ)** Πρέπει κ = 3 και ν = 2 και λ = 4

**5.**

Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν το εμβαδόν και τον όγκο μίας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ. Να προσδιορίσετε το συντελεστή , το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε

μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου όταν ρ = 10 ;

**Προτεινόμενη λύση**

Εμβαδόν σφαίρας : Ε = 4πρ2 όπου π = 3,14….

Συντελεστής : 4π , κύριο μέρος ρ2 , βαθμός, ως προς ρ, 2ος

Αριθμητική τιμή για ρ = 10 : 4π102 = 4π100 = 400π

Όγκος σφαίρας : V = πρ3 όπου π = 3,14….

Συντελεστής : π , κύριο μέρος ρ3, βαθμός, ως προς ρ, 3ος

Αριθμητική τιμή για ρ = 10 : π103 = π1000 = 

**6.**

Μια ομάδα καλαθοσφαίρισης έδωσε 9 αγώνες. Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που εκφράζει τους βαθμούς που συγκέντρωσε, αν σε κάθε νίκη

παίρνει 2 βαθμούς και σε κάθε ήττα 1 βαθμό.

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω ότι η ομάδα νίκησε σε x αγώνες, οπότε έχασε σε 9x αγώνες.

Οι βαθμοί από τις νίκες είναι 2x και από τις ήττες (9x) ⋅1 = 9x.

Το σύνολο των βαθμών δίνεται από την αλγεβρική παράσταση Π = 2x + 9x =

= x + 9

όπου x ο αριθμός των νικών

**7.**

Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που

εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ.

Ποιο είναι το εμβαδόν όταν x = 12 ;

**Προτεινόμενη λύση**

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο

ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι

ΒΓ2 = ΑΒ2 + ΑΓ2 = x2 + 52 = 25 + x2 **(1)**

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ είναι ίσο με

(ΒΓΔΕ ) = ΒΓ2 και λόγω της (1)

(ΒΓΔΕ ) = 25 + x2

Για x = 12 το εμβαδόν είναι (ΒΓΔΕ ) =25 + 122 = 25 + 144 = 169 τ.μονάδες

**1.2 Β. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 32**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1 .**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο Σ

**β)** Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο Λ

**γ)** Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο Σ

**δ)** Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο Λ

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** 5x2 + 2x2 = … **β)** 5x2 ⋅ 2x3 = … **γ)** 3x2y + 2x = …

**δ)** 4x2yyx2 = … **ε)** 2xy⋅ y2 =… **στ)** 6x3y:3xy

**ζ)** 5x4ω3(….) = 10x6 ω4 **η)**=  **θ)** x2y …= 4x2y

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 5x2 + 2x2 = 3x2 **β)** 5x2 ⋅ 2x3 =10x5 **γ)** 3x2y + 2x = 5x2y

**δ)** 4x2yyx2 = 3x2y **ε)** 2xy⋅ y2 = 2xy3 **στ)** 6x3y:3xy = 2x2

**ζ)** 5x4ω3(2x2ω) = 10x6 ω4 **η)**=  **θ)** 3x2y 7x2y = 4x2y

**Ασκήσεις**

**1.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** 7x2y + 4 x2y **β)** 4αx26αx2 + αx2 **γ)** 6x3x3

**δ)** 0,25 αβ  0,35 αβ + 0,5αβ **ε)** xy2ω41,2 xy2ω4

**στ)** 3x2 + 4 x2 x2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 7x2y + 4 x2y = (7 + 4) x2y = 3x2y

**β)** 4αx26αx2 + αx2 = (4 6 + 1) αx2 =  αx2

**γ)** 6x3x3 = x3 = x3

**δ)** 0,25 αβ  0,35 αβ + 0,5αβ = (0,25  0,35 + 0,5) αβ = 0,4αβ

**ε)** xy2ω41,2 xy2ω4 =  xy2ω4 =  xy2ω4 =

=  xy2ω4  =  xy2ω4

**στ)** 3x2 + 4 x2 x2 = (3 + 4 ) x2 = 0x2 = 0

**2.**

Να υπολογίσετε τα γινόμενα

**α)** 3x⋅ 5x2 **β)** 6x2⋅ x3 **γ)** 2xy3⋅ (3x2 y)

**δ)** 3x2 y⋅(2xy4ω) **ε)** αβ3⋅ 4αβ3 **στ)** x3α2⋅

**ζ)** ⋅ (3x2 ω) 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 3x⋅ 5x2 = 15x3

**β)** 6x2⋅ x3 = x5 =  x5

**γ)** 2xy3⋅ (3x2 y) = 6x3 y4

**δ)** 3x2 y⋅(2xy4ω) = 6x3y5ω

**ε)** αβ3⋅ 4αβ3 =  α2β6

**στ)** x3α2⋅ = x4α5 =  x4α5

**ζ)** ⋅(3x2 ω)  = ⋅(3)⋅ ⋅ x3y4ω4 =  x3y4ω4

**3.**

Να υπολογίσετε τα πηλίκα

**α)** 12α3 : (3α) **β)** 8x2y:(2xy2) **γ)** : 

**δ)** (0,84 x2 ω5): (0,12xω3) **ε)** (x3α4ω):  **στ)** (0,5α3β7): 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 12α3 : (3α) =  = 4α2

**β)** 8x2y:(2xy2) = = 

**γ)** :  =  = αβ3 = αβ3

**δ)** (0,84 x2 ω5): (0,12xω3) =  =  = 7xω2

**ε)** (x3α4ω): =  = xα3ω = 4 xα3ω

**στ)** (0,5α3β7):  =  = αβ5 = αβ5

**4.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** ⋅ (6xy3) **β)** (2x2y3)3:(8x3y4) **γ)** (2xy4ω3)2⋅(x2y)3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ⋅ (6xy3) = ⋅ (6xy3) = x5y5 = x5y5

**β)** (2x2y3)3:(8x3y4) = = x3y5

**γ)** (2xy4ω3)2⋅(x2y)3  = (4x2y8ω6) ⋅(x6y3) = 4x8 y11ω6

**5.**

Να βρείτε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων. Ποιες από τις εκφράσεις που βρήκατε είναι μονώνυμα ;

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Το σχήμα αποτελείται από τρία τετράγωνα πλευρά x, άρα Ε = 3x2

**β)** Το σχήμα αποτελείται από δύο ορθογώνια διαστάσεων x , y, άρα Ε = 2xy

**γ)** Το σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο πλευράς x και ένα ορθογώνιο

διαστάσεων x , y, άρα Ε = x2 + xy

**δ)** Το σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο πλευρά 2x και ένα ημικύκλιο

διαμέτρου 2x δηλαδή ακτίνας x, άρα

Ε = (2x)2 +  = 4x2 += x2 = x2 , όπου π = 3,14……

**ε)** Το σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο διαστάσεων 2x , y και ένα ημικύκλιο

διαμέτρου 2x δηλαδή ακτίνας x, άρα Ε = 2xy +  , όπου π = 3,14……

Μονώνυμα είναι τα (α) , (β) , (δ)



**6.**

Να συγκρίνετε το εμβαδόν του πράσινου

τριγώνου με το άθροισμα των εμβαδών

των κίτρινων τριγώνων.

**Προτεινόμενη λύση**

Φέρνοντας το ύψος ΕΖ του τριγώνου ΔΕΓ

προς τη ΔΓ είναι ΕΖ = y.

Το πράσινο τρίγωνο έχει εμβαδόν

(ΔΕΖ) =  = 

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν

(ΑΒΓΔ) = xy επομένως το πράσινο

τρίγωνο έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του

εμβαδού του ορθογωνίου .

Συνεπώς, το άθροισμα των εμβαδών των δύο κίτρινων τριγώνων θα είναι ίσο με το υπόλοιπο μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

Άρα το εμβαδόν του πράσινου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο κίτρινων τριγώνων

**1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**

**ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 35 -37**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα ;

**α)** 4x3 5x2 + 2x  **β)** 3x4 7x2 12

**γ)** x2y 5xy + y2 +  **δ)**  x3 + 2x2y y2 + 3y3

**Προτεινόμενη λύση**

Είναι τα (β), (γ)

Τα (α) , (δ) δεν είναι, διότι τα  και  δεν είναι μονώνυμα.

**2.**

Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;

**α)**  7 3x 2x2 **β)** 3x2 5x 3x2 + 10

**γ)** 4x3 + x2 3x3 +2x –x3 + 6 **δ)** 2xy 3y + 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Είναι στην τελική μορφή και είναι 2ου βαθμού

**β)** 3x2 5x 3x2 + 10 = 5x + 10 δεν είναι δευτέρου βαθμού ως προς x.

**γ)** 4x3 + x2 3x3 +2x –x3 + 6 = x2 + 2x + 6 είναι 2ου βαθμού.

**δ)** Δεν είναι δευτέρου βαθμού ως προς x

**3.**

Ένας μαθητής θέλοντας να υπολογίσει το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων

4x3 8x2 + x + 7 και x36x + 2 έγραψε

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Άθροισμα |  | Διαφορά |
| 4x38x2 + x + 7  + x3  6x + 2 |  | 4x38x2 + x + 7  +  x3 + 6x  2 |
| 5x38x2 5x + 9 |  | 3x38x2 + 7x + 5 |

Είναι σωστός ο τρόπος που εφάρμοσε ; Να τεκμηριώσετε την απάντηση σας.

**Προτεινόμενη λύση**

Ναι είναι σωστός.

**Τεκμηρίωση**

Για να βρούμε το άθροισμα δύο πολυωνύμων κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων,

η οποία είτε γίνει οριζόντια είτε κατακόρυφα δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

Και για να βρούμε την διαφορά προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του

αφαιρετέου.

**4.**

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο 2x2 + 5x + 7 για να βρούμε άθροισμα 8x2 + 4x 5 είναι το

α) 6x2 + x 2 β) 10x2 + 9x + 2 γ) 6x2x12 δ) 6x2 + x + 12

**Προτεινόμενη λύση**

Αν Ρ(x) είναι ο το ζητούμενο πολυώνυμο τότε πρέπει να ισχύει

Ρ(x) + 2x2 + 5x + 7 = 8x2 + 4x 5 άρα

Ρ(x) = 8x2 + 4x 5 (2x2 + 5x + 7)

Ρ(x) = 8x2 + 4x 5 2x2  5x  7

Ρ(x) = 6x2x12

Συνεπώς σωστό το (γ)

**5.**

Τα πολυώνυμα Α(x) , B(x) και Γ(x) έχουν βαθμούς 2 , 3 και 2 αντίστοιχα.

**α)** Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου Α(x) + Β(x)

**β)** Αν το πολυώνυμο Α(x) + Γ(x) δεν είναι το μηδενικό τι βαθμό μπορεί να έχει ;

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Το πολυώνυμο Α(x) + Β(x) είναι 3ου βαθμού δεδομένου ότι το Β(x) είναι 3ου

βαθμού και το Α(x) είναι 2ου.

**β)**

Το πολυώνυμο Α(x) + Γ(x) είναι το πολύ 2ου βαθμού.

Π.χ  Αν Α(x) = 3x2 + 2x + 1 και Γ(x) = x27 τότε

Α(x) + Γ(x) = 4x2 + 2x 6 που είναι 2ου βαθμού

 Αν Α(x) = 3x2 + 2x + 1 και Γ(x) = 3x27 τότε

Α(x) + Γ(x) = 2x 6 που είναι 1ου βαθμού

 Αν Α(x) = 3x2 + 2x + 1 και Γ(x) = 3x2 2x 7 τότε

Α(x) + Γ(x) = 6 που είναι 0ου βαθμού

**Ασκήσεις**

**1.**

Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x

**α)** P(x) = 3x5x2 + x4 + 10 + 2x3 **β)** Q(x) = 6x + 2x3 + 1

**γ)** A(x) = 3x2 + 7 + 2x3 + 7x **δ)** B(x) = xx45

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** P(x) = 3x5x2 + x4 + 10 + 2x3 = x4 + 2x35x2 + 3x + 10

**β)** Q(x) = 6x + 2x3 + 1 = 2x3 6x + 1

**γ)** A(x) = 3x2 + 7 + 2x3 + 7x = 2x3 3x2 + 7x + 7

**δ)** B(x) = xx45 = x4  + x 5

**2.**

Δίνεται το πολυώνυμο Α = 2xy2 + y3 + 2x3 – xy2

**α)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή του για x = 2 και y = 1

**β)** Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο

βαθμός του ως προς x και y ;

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** A =2xy2 + y3 + 2x3 – xy2 = 3xy2 + y3 + 2x3

Για x = 2 και y = 1 έχουμε Α = 3⋅2⋅(1)2 + (1)3 + 2⋅23 =

= 3⋅2⋅1 + (1) + 2⋅8 =

=61 + 16 = 9

**β)** Α = y33xy2  + 2x3 το οποίο είναι 3ου βαθμού ως προς x και y

**3.**

Αν Ρ(x) = 2x2 + 2x9, να αποδείξετε ότι

**α)** Ρ(3) = Ρ(2 ) **β)** 3Ρ(1) +Ρ(3) = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Ρ(3) = 2(3)2 + 2(3)9 = 2⋅9 + 2(3)9 = 1869 = 3

Ρ(2) = 2⋅22 + 2⋅29 = 2⋅ 4 + 2⋅29 = 8 + 4 9 = 3

Άρα Ρ(3) = Ρ(2 )

**β)**

Ρ(1) = 2⋅12 + 2⋅19 = 2⋅1 + 2⋅19 = 2 + 29 = 5

Ρ(3) = 2⋅32 + 2⋅39 = 2⋅9 + 2⋅39 = 18 + 6 9 =15

Οπότε 3Ρ(1) + Ρ(3) =3(5) + 15 = 15 + 15 = 0

**4.**

2x

100m

Η επιφάνεια ενός σταδίου αποτελείται

από δύο ημικυκλικούς δίσκους και ένα

ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει

μήκος 100 μέτρα και πλάτος 2x μέτρα

**α)** Να βρείτε την περίμετρο και το

εμβαδόν του

**β)** Να υπολογίσετε την περίμετρο και το

εμβαδόν του , αν το πλάτος είναι ίσο με

60 μέτρα.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Η περίμετρος Π του σταδίου είναι ίση με 2 φορές το μήκος του ορθογωνίου και 2 φορές το μήκος ενός ημικυκλίου δηλαδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας x.

Άρα Π = 2⋅100 + 2πx = 200 + 2πx , όπου π = 3,14…..

Το εμβαδόν Ε = του σταδίου είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου συν 2 φορές το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας x δηλαδή το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας x.

Άρα Ε = 2x100 + πx2 = 200x + πx2

**β)**

Αν 2x = 60, δηλαδή x = 30, τότε Π = 200 + 2π⋅30 = 200 + 60π m και

E = 200⋅ 30 + π⋅302 = 6000 + 900π m2

**5.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** (2x2x) – ( x35x2 + x1) **β)** 3x2y ( 2xy – yx2) + ( 3xyy3)

**γ)** (2α2 3αβ) – (β2 + 4αβ) – (α2 + β2) **δ)** 2ω2 – [ 4ω3 ( ω2 + 5ω)]

**ε)**  **στ)** (0,4x3 + 2,3 x2 )( + ( 3,6 x3 0,3x2 + 4)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(2x2x) – ( x35x2 + x1) = 2x2x – x3 + 5x2– x + 1 = – x3 + 7x2 – 2x + 1

**β)**

3x2y ( 2xy – yx2) + ( 3xyy3) = 3x2y2xy + yx2 + 3xyy3 =

=2x2y + xyy3

**γ)**

(2α2 3αβ) – (β2 + 4αβ) – (α2 + β2) = 2α2 3αβ – β2 – 4αβ – α2 – β2 =

= α2 7αβ –2β2

**δ)**

2ω2 – [ 4ω3 ( ω2 + 5ω)] = 2ω2 – [ 4ω3ω2  5ω] =

= 2ω2 – 4ω + 3 + ω2 + 5ω

= 3ω2 + ω + 3

**ε)**

 = x2 x + 1  x – x2 +  =

= – x2 x + 

**στ)**

(0,4x3 + 2,3 x2 ) + ( 3,6 x3 0,3x2 + 4) = 0,4x3 + 2,3 x2 +3,6 x3 0,3x2 + 4 =

= 4x3 + 2x2 + 4

**6.**

Αν Α(x) = 2x3 – x2 + x4, B(x) = 3x3 + 5x2 και Γ(x) = 4x23x + 8 ,

να βρείτε τα πολυώνυμα

**α)** Α(x) –B(x) **β)** A(x) + Γ(x) **γ)** Γ(x) – [A(x) + B(x)]

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Α(x) –B(x) = (2x3 – x2 + x4) – (3x3 + 5x2) =

= 2x3 – x2 + x4 + 3x3  5x + 2 =

= 5x3 – x2 4x2

**β)**

A(x) + Γ(x) = (2x3 – x2 + x4) + (4x23x + 8 ) =

= 2x3 – x2 + x4 + 4x23x + 8 =

= 2x3 + 3x22x + 4

**γ)**

Γ(x) –[A(x) + B(x)] = (4x23x + 8 ) – [(2x3 – x2 + x4) + (3x3 + 5x2)] =

= 4x23x + 8 – [2x3 – x2 + x43x3 + 5x2] =

= 4x23x + 8 – 2x3 + x2 – x + 4 + 3x3 – 5x + 2 =

= x3 + 5x2  9x + 14

**7.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

**α)** ( ⋅⋅⋅⋅ ….4x⋅⋅⋅⋅….) + ( x2 ⋅⋅⋅….+ 4) = 6x2 8x + 7

**β)** (x3 ⋅⋅⋅⋅….+ 8)  (⋅⋅⋅⋅ …. + x2 ⋅⋅⋅⋅⋅…) = x3 – x2 + 5x + 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(7x24x + 3) + ( x2 4x + 4) = 6x2 8x + 7

**β)**

(x3 + 5x. + 8)  (2x3 + x2 1) = x3 – x2 + 5x + 9

**8.**

Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό

(τα τρία πολυώνυμα οριζοντίως ,καθέτως και διαγωνίως να έχουν το ίδιο άθροισμα)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2x2 + 2x 3 | 7x2 + 3x 4 | P(x) = 6x22x + 1 |
| 9x23x + 2 | Q(x) = 5x2 + x 2 | x2 + 5x 6 |
| 4x2 + 4x 5 | 3x2x | 8x21 |

**Προτεινόμενη λύση**

Το ζητούμενο άθροισμα πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των πολυωνύμων της

1ης στήλης = (2x2 + 2x 3) + (9x23x + 2) + (4x2 + 4x 5) =

= 2x2 + 2x 3 + 9x23x + 2 + 4x2 + 4x 5 =

= 15x2 + 3x 6

Έστω Ρ(x) το πολυώνυμο που λείπει στην 1η γραμμή.

Τότε πρέπει (2x2 + 2x 3 ) + ( 7x2 + 3x 4) + Ρ(x) = 15x2 + 3x 6

2x2 + 2x 3 + 7x2 + 3x 4 + Ρ(x) = 15x2 + 3x 6

P(x) = 15x2 + 3x 62x22x + 37x23x + 4

P(x) = 6x22x + 1

Έστω Q(x) το μεσαίο πολυώνυμο που λείπει στην 2η γραμμή.

Τότε πρέπει Ρ(x) + Q(x) + (4x2 + 4x 5 ) = 15x2 + 3x 6 από όπου

βρίσκουμε Q(x) = 5x2 + x 2

Ομοίως δουλεύοντας βρίσκουμε ότι το τρίτο πολυώνυμο της 2ης γραμμής

είναι το x2 + 5x 6 , το μεσαίο πολυώνυμο της 3ης γραμμής είναι το 3x2x

και το τρίτο πολυώνυμο της τρίτης γραμμής είναι το 8x21.

**9.**

Αν Ρ(x) = (5x2 + 4x 3) –( x22x +1) + ( 3x2 + x) και Q(x) = αx2 + βx + γ,

να βρείτε τις τιμές των α , β , γ ώστε τα πολυώνυμα Ρ(x) και Q(x) να είναι ίσα.

**Προτεινόμενη λύση**

Ρ(x) = (5x2 + 4x 3) – ( x22x +1) + ( 3x2 + x) =

=5x2 + 4x 3 – x2 + 2x –1 + 3x2 + x =

= 3x2 + 7x 4

Για να είναι τα πολυώνυμα Ρ(x) και Q(x) να ίσα, θα πρέπει

α = 3 και β =7 και γ = 4

**10.**

Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από το σημείο Α

και σε χρόνο t sec κατεβαίνει το δρόμο

ΑΒ με επιτάχυνση α = 2 m/sec2 .

Όταν φτάσει στο σημείο Β συνεχίζει να

κινείται στον δρόμο ΒΓ για 10 sec με

σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε την παράσταση

που εκφράζει την απόσταση που διάνυσε ο ποδηλάτης.

Ποια απόσταση διάνυσε ο ποδηλάτης αν t = 5 sec ;

**Προτεινόμενη λύση**

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι

η απόσταση ΑΒ είναι ΑΒ = αt2 = 2t2 = t2

και η απόσταση ΒΓ είναι ΒΓ = υt =10υ .

Όμως η ταχύτητα που έχει ο ποδηλάτης στο σημείο Β είναι υ = αt = 2t

Άρα ΒΓ **=**10∙2t = 20t

Συνεπώς η απόσταση ΑΒΓ δίνεται από την παράσταση ΑΒΓ = t2 + 20t.

Αν t = 5, τότε ΑΒΓ = 52+ 20∙5 = 25 + 100 = 125 m

**1.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 40 -41**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. x(x + 1) | 1. x2x |
| β. (x + 1)( x1) | 2. x2 + 1 |
| γ. x(x1) | 3. x2 + 2x + 1 |
| δ. (x + 1)( 1+ x) | 4. x2 + 2x + 3 |
| ε. (x + 1)( x + 2) | 5. x2 + x |
|  | 6. x2 + 3x + 2 |
|  | 7. x21 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| α | β | γ | δ | ε |
| 5 | 7 | 1 | 3 | 6 |

**Προτεινόμενη λύση**

α. x(x + 1) = x2 + x άρα α → 5

β. (x + 1)( x1) = x2 x + x1 = x21 άρα β → 7

γ. x(x1) = x2 x άρα γ → 1

δ. (x + 1)( 1+ x) = x + x2 +1 + x = x2+ 2x +1 άρα δ → 3

ε. (x + 1)( x + 2) = x2 + 2x + x +2 = x2+ 3x +2 άρα ε → 6

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** Αν το πολυώνυμο Ρ(x) έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 2, τότε

το πολυώνυμο Ρ(x)⋅Q(x) έχει βαθμό 6.

**β)** Αν το πολυώνυμο Ρ(x)⋅Q(x) έχει βαθμό 7 και το πολυώνυμο Ρ(x) έχει βαθμό

3, τότε το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 4.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Είναι (Λ) δεδομένου ότι ο βαθμός του γινόμενου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

**β)**

Είναι (Σ). Η αιτιολόγηση όπως στο (α)

**3.**

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

**α)** x(2x + 4) = 2x2 + 4x **β)** 3x2(xy2) = 3x3 y 6x2

**γ)** (x + 5)( 2x + 3) = 2x2 + 3x + 10x + 15 **δ)** (x2 + y)( xy2) = x3x2y2 + xyy3

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**4.**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

**i)** Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

α) 3x + 1 β) x3 + 1 γ) x3 + x2 δ) x3 + x

**ii)** Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

α) 6x2 + 4x + 1 β) 4x2 + 6x

γ) 6 x2 + 4x +2 δ) 6x2 + 4 x

**Προτεινόμενη λύση**

Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι V = x( x + 1)x =

= x3 + x2 άρα σωστό το (γ)

Η επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου είναι E = 2x(x + 1) + 2x2 + 2x(x + 1) =

= 2x2 + 2x + 2x2 + 2x2 + 2x =

= 6x2 + 4x άρα σωστό το (δ)

**5.**

Ο καθηγητής των μαθηματικών ζήτησε από

του μαθητές να γράψουν την αλγεβρική

παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του

ορθογωνίου ΑΒΓΔ και οι μαθητές έδωσαν

τις εξής απαντήσεις

α) ( x + 2)( x + 3) β) 2x⋅ 3x

γ) x2 + 6 δ) x2 + 5x + 6

Ποιές από αυτές είναι σωστές ;

**Προτεινόμενη λύση**

Επειδή ΑΒ = x +3 και ΑΔ = x + 2, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

Ε = (x +3)(x + 2) = x2 + 3x + 2x + 6 = x2 + 5x + 6

Επομένως σωστές είναι οι (α) και (δ)

**Ασκήσεις**

**1.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** 3x2y(5x + 2y) **β)** 4x( 2x2 – x + 2) 8x

**γ)** 5x( 2x3) 3x(23x) **δ)** 2xy(x23y2) 4x(x2y2y3)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

3x2y(5x + 2y) = 15x3y6x2y2

**β )**

4x( 2x2 – x + 2) 8x = 8x3 4x2 + 8x 8x = 8x3 4x2

**γ)**

5x( 2x3) 3x(23x) =10x2 + 15x 6x + 9x2 = x2 + 9x

**δ)**

2xy(x23y2) 4x(x2y2y3) = 2x3y6xy34x3y + 8xy3 =2x3y + 2xy3

**2.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** (2α3β)( 4α + 2β) **β)** (x22x + 4)( x + 2) – 8

**γ)**  3x2(2x + 3) (5x) **δ)** (43x)(52x) 6x(x4)

**ε)** (2x23x 4)( 3x2 + x) **στ)** (3x2 2xy 5y2)(4yx)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(2α3β)( 4α + 2β) = 8α2 + 4αβ + 12αβ 6β2 = 8α2 + 16αβ6β2

**β)**

( x22x + 4)( x + 2) – 8 = x3 + 2x22x24x + 4x + 8 8 = x3

**γ)**

3x2(2x + 3) (5x) = 3x2(10x + 2x2 + 15 3x) =

= 30x3 + 6x4 + 45x2 9x3 =

= 6x4 39x3 + 45x2

**δ)**

(43x)(52x) 6x(x4) = 208x15x + 6x2 6x2+ 24x = x + 20

**ε)**

(2x23x 4)( 3x2 + x) = 6x4 + 2x3 + 9x33x2 + 12x24x =

= 6x4 + 11x3 + 9x24x

**στ)**

(3x2 2xy 5y2)(4yx) = 12x2y3x38xy2+ 2x2y 20y3+ 5xy2 =

= 14x2y3x33xy220y3

**3.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** (3x2)(x2x)(4x3) **β)** 2x(x2x + 1)(x2) – (x1)(2x3)(x + 2)

**γ)** (2x + y)( x23xy)  (3xy)(4x + y)( 2x3y)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(3x2)(x2x)(4x3) = (3x33x22x2 + 2x)( 4x3) =

= (3x35x2+2x)( 4x3) =

=12x49x320x3+ 15x2+ 8x26x =

=12x429x3 + 23x2 6x

**β)**

2x(x2x + 1)(x2) – (x1)(2x3)(x + 2) =

= 2x(x32x2x2 + 2x + x2) – (x1)(2x2 + 4x 3x6) =

= 2x(x33x2 +3x 2) – (x1)(2x2 + x 6) =

= 2x4+ 6x3 6x2 + 4x –( 2x3+ x2 6x 2x2x + 6) =

= 2x4+ 6x3 6x2 + 4x –2x3 x2 + 6x + 2x2 + x6 =

= 2x4+ 4x3 5x2 + 11x6

**γ)**

(2x + y)( x23xy)  (3xy)(4x + y)( 2x3y) =

= 2x3+ 6x2y + yx23xy2 – (3xy)( 8x2 12xy2xy 3y2) =

= 2x3+ 7x2y 3xy2 –(3xy) )( 8x2 14xy 3y2) =

= 2x3+ 7x2y 3xy2 –(24x342x2y9xy2 + 8x2y + 14xy2 + 3y3) =

= 2x3+ 7x2y 3xy2 + 24x3 + 42x2y + 9xy2  8x2y 14xy2 3y3 =

= 22x3 + 41x2y 8xy23y3

**4.**

Να αποδείξετε τις ισότητες

**α)** (x2 –4x + 4)(x2 + 4x + 4)  x2 ( x28) 16 = 0

**β)** (3α + 8β)(βα)  (α + 2β)( β3α) = 6β2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(x2 – 4x + 4)(x2 + 4x + 4) x2 ( x28) 16 =

= x4 + 4x3 + 4x2 4x316x216x + 4x2 + 16x + 16 –x4 + 8x2 16 = 0

**β)**

(3α + 8β)(βα)  (α + 2β)( β3α) =

=3αβ3α2 + 8β2 8αβ – (αβ 3α2 + 2β2 6αβ) =

= 3αβ3α2 + 8β2 8αβ – αβ + 3α2 2β2 + 6αβ = 6β2

**5.**

Αν Ρ(x) = 2x2 + 5x 3 και Q(x) = 4x 5 , να βρείτε τα πολυώνυμα

**α)**  P(x)⋅Q(x) **β)** P(x )⋅[3Q(x) + 11x 12] **γ)** [P(x) 2]⋅[Q(x) + 3]

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

P(x)⋅Q(x) = ( 2x2 + 5x 3 )( 4x 5) =

= 8x3 + 10x2 + 20x225x 12x + 15 =

= 8x3 + 30x2 37x + 15

**β)**

P(x )⋅ [3Q(x) + 11x 12] = ( 2x2 + 5x 3 ) [3(4x 5) + 11x 12] =

= ( 2x2 + 5x 3 ) [12x + 15 + 11x 12] =

= ( 2x2 + 5x 3 )( x + 3) =

= 2x3 6x2 5x2 + 15x + 3x 9 =

= 2x3 11x2 + 18x 9

**γ)**

[P(x) 2]⋅ [Q(x) + 3] = [ 2x2 + 5x 32] [4x5+3] =

= (2x2+ 5x 5)(4x2) =

= 8x3 + 4x2 + 20x2 10x20x + 10 =

= 8x3 + 24x230x + 10

**6.**

Αν Ρ(x) = 3x(2x + 4) (x1) και Q(x) = αx3 + βx2 + γx + δ , να βρείτε τις τιμές

των α, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα Ρ(x) και Q(x) να είναι ίσα.

**Προτεινόμενη λύση**

Ρ(x) = 3x(2x + 4) (x1) = 3x(2x2+ 2x + 4x4) =

= 3x(2x2 + 6x 4) =

= 6x3 + 18x212x

Για να είναι τα πολυώνυμα ίσα πρέπει να ισχύει α = 6, β = 18, γ = 12, δ = 0

**7.**

Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου που έχει

εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν του κίτρινου σχήματος προκύπτει όπως

φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα αν από το εμβαδόν

του ορθογωνίου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του

γκρίζου ορθογωνίου ΘΗΛΚ.

Διαστάσεις του ΑΒΓΔ :  ΑΔ = ΑΘ + ΘΚ + ΚΔ =

= x + y + x

= 2x + y

και ΑΒ = y

Διαστάσεις του ΘΗΛΚ : ΗΛ = y και ΘΗ = 2x

(ΑΒΓΔ) = y(2x + y) = 2xy + y2

(ΘΗΛΚ) = 2xy

Οπότε Ε κίτρινο = 2xy + y2  2xy = y2.

Άρα η ζητούμενη πλευρά είναι ίση με y.

**8.**

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με πλάτος x μέτρα και μήκος μεγαλύτερο από το πλάτος κατά 5 μέτρα . Αν το μήκος ελαττωθεί κατά 3 μέτρα και το πλάτος ελαττωθεί κατά 1 μέτρο, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου θα μειωθεί

κατά 4x + 2 τετραγωνικά μέτρα.

**Προτεινόμενη λύση**

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου πριν τις μεταβολές είναι x και x + 5.

Οπότε το εμβαδόν του είναι Ε = x( x + 5) = x2 + 5x

Μετά τις μεταβολές οι διαστάσεις του ορθογωνίου γίνονται x1 και

x + 53 = x + 2.

Οπότε το εμβαδόν του γίνεται Ε΄= (x1)(x + 2) =

= x2+ 2x –x 2 =

= x2 + x2

ΕΕ΄= x2 + 5x – ( x2 + x2) = x2 + 5x – x2 –x + 2 = 4x + 2

**1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 47 -51**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες ;

α) 0x = 0 β) x + y = 0 γ ) α2α = α3

δ) (x + 3)2 = x2 + 6x + 9 ε) αβ = 0

**Προτεινόμενη λύση**

Ταυτότητες είναι οι (α), (γ) και (δ), διότι αληθεύουν για όλες τις τιμές της μεταβλητής που έχουν

Η x + y = 0 αληθεύει μόνο αν τα x και y είναι αντίθετα και

η αβ = 0 αληθεύει αν α = 0 ή β = 0.

**2.**

Να επιλέξτε την σωστή απάντηση .

**i)** Το ανάπτυγμα του (x + α)2 είναι

α) x2 + α2 β) x22x α + α2 γ) x2 + αx + α2 δ) x2 + 2xα + α2

**ii)** Το ανάπτυγμα του (2α + 1)2 είναι

α) 2α2 + 4α + 1 β) 4α2 + 1 γ) 4α2 + 4α + 1 δ) 4α2 + 2α + 1

**iii)** Το ανάπτυγμα του (y2)2 είναι

α) y2 2y + 4 β) y24 γ) y2 4y + 4 δ) 42 + 4y + 4

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** Σωστή απάντηση είναι η (δ)

**ii)** Σωστή απάντηση είναι η (γ)

**iii)** Σωστή απάντηση είναι η (γ)

**3.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** ( xy)2 = x2 2x(y) + (y)2

**β)** (α + β ) 2 = α2 2αβ + β2

**γ)** (5ω + 4) 2 = 25ω2 + 16

**δ)** (3xy)2 = 3x2 2⋅3x⋅y + y2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x2 2x(y) + (y)2 = x2 + 2xy + y2 ≠ (xy)2 άρα (Λ)

**β)** (α + β )2 = (αβ)2 = α22αβ + β2 άρα (Σ)

**γ)** (5ω + 4) 2 = 25ω2 + 40ω + 16 άρα (Λ)

**δ)** (3xy)2 = 9x22⋅3x⋅y + y2 άρα (Λ)

**4.**

Να επιλέξτε την σωστή απάντηση

**i)** Το ανάπτυγμα του ( x + 1)3 είναι

α) x3 + 3⋅x⋅1 + 13 β) x3 + 13

γ) x3 + 3⋅x2⋅1 + 3⋅x⋅12 + 13 δ) x3 + x2⋅1 + x⋅12 + 13

**ii)**  Το ανάπτυγμα του (β  2)3 είναι

α) x3  3⋅β⋅2 + 23 β) β3 23

γ) β3 β2⋅2 + β⋅22  23 δ) β3 3 ⋅β2⋅2 + 3⋅ β⋅22  23

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** Σωστό το (γ)

**ii)** Σωστό το (δ)

**5.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** (xy)3 = x3 3x2y3xy2 – y3

**β)** (2x + 3) 3 = 2x3 + 3⋅2x2⋅3 + 3⋅2x⋅32 + 33

**γ)** (3x1)3 = (3x)3 3⋅(3x)2⋅1 + 3 ⋅(3x) ⋅12 + 13

**δ)** (x + 2)3 = x3 + 6x2 + 12x + 8

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (xy)3 = x3 3x2y + 3xy2 – y3 άρα (Λ)

**β)** (2x + 3) 3 = (2x)3 + 3⋅(2x)2⋅3 + 3⋅2x⋅32 + 33 άρα (Λ)

**γ)** (3x1)3 = (3x)3 3⋅(3x)2⋅1 + 3 ⋅(3x) ⋅12  13  άρα (Λ)

**δ)** (x + 2)3 = x3 + 3∙x2∙2 + 3∙x∙22 + 23 = x3 + 6x2 + 12x + 8 άρα (Σ)

**6.**

Να επιλέξτε την σωστή απάντηση

**i)** Το ανάπτυγμα του (y3)(y + 3 ) είναι

α) y23 β) 9y2 γ) y2 9 δ) 3y2

**ii)** Το ανάπτυγμα του (y + x)(xy ) είναι

α) y2x2 β) x2y2 γ) (xy)2 δ) x2 + y2

**iii)** Το ανάπτυγμα του (ω2α)(ω + 2α ) είναι

α) ω22α2 β) ω2 + 4α2 γ) 4α2 – ω2 δ) ω24α2

**iν)** Το ανάπτυγμα του (5x)(52 + 5x + x2 ) είναι

α) 53 + x3 β) x353  γ) 53 – x3 δ) 25x3

**νi)** Το ανάπτυγμα του (x + 2α )(x22αx + 4α2 ) είναι

α) x3 + 2α3 β) x3 (2α)3 γ) x32α3 δ) x3 + 8α3

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** Σωστό το (γ)

**ii)** Σωστό το (β)

**iii)** Σωστό το (δ)

**iν)** Σωστό το (γ)

**ν)** Σωστό το (δ)

**7.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. (x + y)(yx) | 1. x22xy + y2 |
| β. (x + y)2 | 2. x3y3 |
| γ. (yx)2 | 3. x33x2y + 3xy2 + y3 |
| δ. (xy)(x2 + xy + y2) | 4. y2x2 |
| ε. (x + y)(x2  xy + y2) | 5. x2 + 2xy + y2 |
| στ. (xy)3 | 6. x2y2 |
|  | 7. x3 + y3 |
|  | 8. x3 – 3x2y + 3xy2 – y3 |

**Προτεινόμενη λύση**

α. (x + y)(yx) = y2x2  άρα α → 4

β. (x + y)2 = x2 + 2xy + y2  άρα β → 5

γ. (yx)2 = x22xy + y2 άρα γ → 1

δ. (xy)(x2 + xy + y2) = x3y3 άρα δ→ 2

ε. (x + y)(x2  xy + y2) = x3 + y3 άρα ε→ 7

στ. (xy)3 = x3 – 3x2y + 3xy2 – y3 άρα στ → 8

**Ασκήσεις**

**1.**

Να βρείτε τα αναπτύγματα

**α)**  (x + 2) 2 **β)** (y + 5) 2 **γ)** (2ω + 1) 2 **δ)** (κ + 2λ) 2

**ε)**  (3y + 2β) 2 **στ)** (x2 + 1) 2 **ζ)** (y2 + y) 2 **η)** (2x2 + 3x) 2

**θ)**  (x + ) 2 **ι)** ( + ) 2 **ια)**  **ιβ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x + 2) 2 = x2 + 2∙2∙x + 22 = x2 + 4x + 4

**β)** (y + 5) 2 = y2 + 2∙y∙5 + 52 = y2 + 10y + 25

**γ)** (2ω + 1) 2 = (2ω)2 + 2∙2ω∙1 + 12 = 4ω2 + 4ω + 1

**δ)** (κ + 2λ) 2 = κ2 + 2∙κ∙2λ + (2λ) 2= κ2 + 4κλ + 4λ2

**ε)** (3y + 2β) 2 = (3y)2 + 2∙3y∙2β + (2β) 2 = 9y2 + 12βy + 4β2

**στ)**  (x2 + 1) 2 = (x2)2 + 2∙x2∙1+ 12 = x4 + 2x2 +1

**ζ)** (y2 + y) 2 = (y2)2 + 2∙y2∙y + y2 = y4 + 2y3 + y2

**η)** (2x2 + 3x) 2 = (2x2)2 + 2(2x2)(3x) + ( 3x)2 = 4x4 + 12x3 + 9x2

**θ)**  = x2 + 2∙∙x + = x2 + 2x + 2

**ι)** =  + 2 +  = x + 2 + y

**ια)** = α2 + 2∙α∙ +  = α2 + α + 

**ιβ)** = ω2 + 2∙ω∙ + = ω2 + 8 + 

**2.**

Να βρείτε τα αναπτύγματα

**α)** (x  3) 2 **β)** (y  5) 2 **γ)** (3ω1) 2 **δ)** (2κ  λ) 2

**ε)** (3y  2β) 2 **στ)** (x2  2) 2 **ζ)** (y2 y) 2 **η)** (2x2 5x) 2

**θ)**  **ι)**  **ια)**  **ιβ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x  3) 2 = x2  2∙3∙x + 32 = x2 6x + 9

**β)** (y  5) 2 = y2  2∙y∙5 + 52 = y2  10y + 25

**γ)** (3ω1) 2 = (3ω)2  2∙3ω∙1 + 12 = 9ω26ω + 1

**δ)** (2κλ)2 = (2κ)2  2∙2κ∙λ + λ 2 = 4κ2  4κλ + λ2

**ε)** (3y  2β) 2 = (3y)2 2∙3y∙2β + (2β) 2 = 9y2 12βy + 4β2

**στ)** (x2  2) 2 = (x2)2 2∙x2∙2 + 22 = x4  4x2 + 4

**ζ)** (y2 y) 2 = (y2)2  2∙y2∙y + y2 = y4  2y3 + y2

**η)** (2x2 5x) 2 = (2x2)2  2(2x2)(5x) + ( 5x)2 = 4x4  20x3 + 25x2

**θ)** = x2  2∙x∙ +  = x2  2x + 3

**ι)** = 2 +  = x  2 + y

**ια)** = α2 2∙α∙ +  = α2  3α + 

**ιβ)** = ω2  2∙ω∙ + = ω2  4 + 

**3.**

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** = + 2∙1 + 12 =3 + 2 + 1 = 4 + 2

**β)** =  + 2 +  = 6 + 2 + 5 = 11+ 2

**γ)** = 2∙3 + 32 = 2 6+ 9 = 116

**δ)** = 122∙1∙ + ()2 = 12+ 7 = 82

**4.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)**  ( x + 3)2 = x2 + 6x + 9 **β)** (y 4)2 = y2 8y + 16

**γ)** (4xα)2 = 16x28xα + α2 **δ)** (x22ω)2 = x44x2ω + 4ω2

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**5.**

Να βρείτε τα αναπτύγματα

**α)**  (x + 1) 3 **β)** (y + 4) 3 **γ)** (2α + 1) 3 **δ)** (3α + 2β) 3

**ε)** (x2 + 3) 3 **στ)** (y2  + y) 3 **ζ)** (x 2) 3 **η)** (y 5) 3

**θ)** (3α  1) 3 **ι)** (2x 3y) 3 **ια)** (y2 2) 3 **ιβ)** (ω2 2ω) 3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x + 1) 3 = x3 + 3∙x2∙ 1+ 3∙x∙12 + 13 = x3 + 3x2+ 3x + 1

**β)** (y + 4) 3 = y3 + 3∙y2∙ 4+ 3∙y∙42 + 43 = y3 + 12y2 + 48y + 64

**γ)** (2α + 1) 3 = (2α)3 + 3∙(2α)2∙ 1+ 3∙2α∙12 + 13 = 8α3 + 12α2 + 6α + 1

**δ)** (3α + 2β) 3 = ( 3α)3 + 3∙(3α)2∙ (2β) + 3∙3α∙(2β)2 + (2β)3 =

= 27α3 + 54α2β+ 36αβ2 + 8β3

**ε)** (x2 + 3) 3 = (x2)3 + 3∙(x2)2∙ 3+ 3∙x2∙32 + 33 = x6 + 9x4 + 27x2 + 27

**στ)** (y2  + y) 3 = ( y2)3 + 3∙(y2)2∙ y+ 3∙y2∙y2 + y3 = y6 + 3y5 + 3y4 + y3

**ζ)** (x 2) 3 = x3  3∙x2∙ 2+ 3∙x∙22  23 = x3  6x2 + 12x  8

**η)** (y 5) 3 = y3  3∙y2∙ 5+ 3∙y∙52  53 = y3  15y2 + 75y  125

**θ)** (3α  1) 3 = (3α)3  3∙(3α)2∙ 1+ 3∙3α∙12  13 = 27α3  27α2 + 9α  1

**ι)** (2x 3y) 3 = (2x)3 3∙(2x)2∙ (3y) + 3∙2x∙(3y)2  (3y)3 =

= 8x3  36x2y+ 54xy2  27y3

**ια)** (y2 2) 3 = (y2)3  3∙(y2)2∙ 2 + 3∙y2∙22  23 = y6  6y4 + 12y2  8

**ιβ)** (ω2 2ω) 3 = (ω2)3  3∙(ω2)2∙ (2ω) + 3∙ω2∙(2ω)2 (2ω)3 =

= ω6 6ω5 + 12ω48ω3

**6.**

Να βρείτε τα αναπτύγματα

**α)** (x1) (x + 1) **β)** (y2) (y + 2) **γ)** (3ω)(3 + ω)

**δ)** (x + 4) (4x) **ε)** (x y) (xy) **στ)** (x + y) (xy)

**ζ)** (2x + 7y)(2x 7y) **η)**  **θ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x1) (x + 1) = x212 = x21

**β)** (y2) (y + 2) = y222 = y24

**γ)** (3ω)(3 + ω) = 32ω2 = 9ω2

**δ)** (x + 4) (4x) = 42x2 = 16x2

**ε)** (x y) (xy) =(x y) (x + y) = (x2y2) = y2x2

**στ)** (x + y) (xy) = (xy)(x + y) = x2y2

**ζ)** (2x + 7y)(2x 7y) = (2x)2 (7y)2= 4x249y2

**η)**  = x2 = x22

**θ)**  =   = x  y

**7.**

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

Ρ(x) = (x3)2 + ( 3x + 1)2 –10( x1)(x + 1) είναι σταθερό

**Προτεινόμενη λύση**

Ρ(x) = (x3)2 + ( 3x + 1)2 –10( x1)(x + 1) =

= x26x + 9 + 9x2 + 6x + 110(x21) =

= x26x + 9 + 9x2 + 6x + 110x2 + 10 = 20 σταθερό

**8.**

**α)** Να αποδείξετε ότι (αβ) (α + β) (α2 + β2)( α4 + β4) = α8β8

**β)** Να υπολογίσετε το γινόμενο 9⋅11⋅101⋅10001

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (αβ) (α + β) (α2 + β2)( α4 + β4) = (α2β2) (α2 + β2)( α4 + β4) =

= ( α4  β4) )( α4 + β4) = α8β8

**β)** 9⋅11⋅101⋅10001= (101)(10 + 1)(100 + 1)(10000 + 1) **(1)** γινόμενο που

προκύπτει από το (α) για α = 10 και β = 1.

Επομένως η (1) γίνεται 9⋅11⋅101⋅10001= (101)(10 + 1)(100 + 1)(10000 + 1)=

= 1081

**9.**

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  = = = 

**β)**  =  = == 

**γ)**  = =  = 

**δ)**  = =  =  =

= 

**10.**

Να βρείτε τα αναπτύγματα

**α)** (x3) (x2 + 3x + 9) **β)** (y + 2) (y2 2y + 4)

**γ)** (2ω +1) (4ω22ω + 1) **δ)** (1α) ( 1 + α + α2)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x3) (x2 + 3x + 9) = x3 33 = x3 27

**β)** (y + 2) (y2 2y + 4) = y3 + 23 = y3 + 8

**γ)** (2ω +1) (4ω22ω + 1) = (2ω)3 + 13 = 8ω3 + 1

**δ)** (1α) ( 1 + α + α2) = 13α3 = 1α3

**11.**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** (x  4) 2 + ( 2x + 5)2 **β)** (x2 1) 2 (x23)(x2 + 3 )

**γ)** (x + y)2 –(x2y)( x + 2y) + ( 2xy)2 **δ)** (3x 4) 2 + ( 3x + 4)22(3x4)(3x + 4)

**ε)** (2α + 1)3 + (2α 1)3 **στ)** (α + 2)3 –(α + 2)(α2  2α + 4)

**ζ)** (α2 + α) 3 ( α2 –α) 3 **η)** (4α 1)3α(8α + 1)(8α 1)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(x  4) 2 + ( 2x + 5)2  = x28x+ 16 + 4x2 + 20x + 25 = 5x2 + 12x + 41

**β)**

(x2 1) 2 (x23)(x2 + 3 ) = x42x2 + 1 – (x49) =

= x42x2 + 1 – x4 + 9 =

= 2x2+ 10

**γ)**

(x + y)2 – (x2y)( x + 2y) + ( 2xy)2 =

= x2 + 2xy + y2 –(x2  4y2) + 4x24xy + y2 =

= x2 + 2xy + y2 – x2 + 4y2 + 4x24xy + y2 =

= 4x2 2xy + 6y2

**δ)**

(3x 4) 2 + ( 3x + 4)22(3x4)(3x + 4) =

= 9x224x + 16 + 9x2 + 24x + 16 2(9x216) =

= 9x224x + 16 + 9x2 + 24x + 16 18x2 + 32 =

= 64

**ε)**

(2α + 1)3 + (2α 1)3 = (2α)3 + 3(2α)2 + 3∙2α +1 + (2α)3 3(2α)2 + 3∙2α 1=

= 8α3 + 6α + 8α3 + 6α =

= 16α3 + 12α

**στ)**

(α + 2)3 – (α + 2)(α2  2α + 4) = α3 + 3α2∙2 + 3α∙22 + 23 (α3 + 23) =

= α3 + 6α2 + 12α + 8 –α3 8 =

= 6α2 + 12α

**ζ)**

(α2 + α) 3 ( α2 – α) 3 =(α2)3 + 3α4∙α + 3α2∙α2 + α3 – [(α2)33α4∙α + 3α2∙α2  α3] =

= α6 + 3α5 + 3α4+ α3 – α6 + 3α53α4 + α3  =

= 6α5 + 2α3

**η)**

(4α 1)38(8α + 1)(8α 1) = (4α)33(4α)2 + 3(4α) 1α(64α2 1) =

= 64α348α2 + 12α 1 – 64α3 + α =

= 48α2+ 13α1

**12.**

Να αποδείξετε ότι

**α)** (x2y)2 – (2x –y)2 + 3x2 = 3y2

**β)** (α3β)2 + (3α + 2β)(3α2β) – (3αβ)2 = α2 + 4β2

**γ)** (x1)(x + 1)32x(x1)(x + 1) = x4 1

**δ)** (α2 + β2)2 – (2αβ)2 = (α2β2)2

**ε)** (α4)2 + (2α 3)2 = α2 + (2α5)2

**στ)** (2x2 + 2x)2 + ( 2x + 1)2 = ( 2x2 + 2x + 1)2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(x2y)2 – (2x –y)2 + 3x2 = x24xy + 4y2 –(4x24xy + y2) + 3x2 =

= x24xy + 4y2 – 4x2 + 4xy  y2 + 3x2  =

= 3y2

**β)**

(α3β)2 + (3α + 2β)(3α2β) – (3αβ)2 =

= α26αβ + 9β2 + 9α2 – 4β2 –(9α26αβ + β2) =

= α26αβ + 9β2 + 9α2 – 4β2 –9α2 + 6αβ  β2 =

= α2+ 4β2

**γ)**

(x1)(x + 1)32x(x1)(x + 1) = (x1)(x3+ 3x2 + 3x + 1) 2x(x21) =

= x4 + 3x3 + 3x2 + x –x33x23x1 2x3+ 2x =

= x41

**δ)**

(α2 + β2)2 – (2αβ)2 = α4 + 2α2β2 + β4 4α2β2 =

= α4  2α2β2 + β4 =

= ( α2β2)2

**ε)**

(α4)2 + (2α 3)2 = α28α + 16 + 4α212α + 9 =

= α2 + 4α2 20α + 25 =

= α2 + ( 2α5)2

**στ)**

(2x2 + 2x) 2 + (2x + 1) 2 = 4x4 + 8x3 + 4x2 + 4x2 + 4x + 1=

= 4x4 + 8x3 + 8x2 + 4x + 1 **(1)**

( 2x2 + 2x + 1)2 = 4x4 + 4x2 + 1 + 8x3 + 4x2 + 4x =

= 4x4 + 8x3 + 8x2 + 4x + 1 **(2)**

Από (1) , (2) προκύπτει ότι ( 2x2 + 2x) 2 + ( 2x + 1) 2 = ( 2x2 + 2x + 1)2

**13.**

Αν x = 3 +  και y = 3 , να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)** xy **β)** x2y2 **γ)** x2 + y2 **δ)** x3 + y3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

xy = (3 + ) (3 ) = 95 = 4

**β)**

x2y2 = (3 + )2 (3  )2 =

= 9 + 6  + 5 – (9 6  + 5) =

= 9 + 6  + 5 9 + 6   5 =

= 12

**γ)**

Από την εφαρμογή 2 της σελίδας 45 έχουμε

x2 + y2 = (x + y)2 2xy = (3 + + 3 )2  2 ∙ 4 = 368 = 28

**δ)**

Από την εφαρμογή 2 της σελίδας 45 έχουμε

x3 + y3 = ( x + y)3 3xy(x + y) = (3 + + 3  )3 3 ∙ 4 ∙ (3 + + 3  ) =

= 21672 =

= 144

**14.**

**α)** Να αποδείξετε ότι = 20

**β)** Να υπολογίσετε τον αριθμό x = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

= α2 + 10 + =

= α2 + 10 +  α2 + 10  = 20

**β)**

Στην προηγούμενη ταυτότητα θέτουμε όπου α το 2005

 = 20 άρα

 = 20 άρα x = 20

**15.**

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε

ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο

**Προτεινόμενη λύση**

Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α ισχύει :

ΒΓ2 = ΑΒ2 + ΑΓ2 =

= (4x + 1)2 + (3x + 2)2 =

= 16x2 + 8x + 1 + 9x2 + 12x + 4 =

= 25x2 + 20x + 5

Ακόμα είναι ΓΔ2 =1 και ΒΔ2 = (5x + 2)2 =

= 25x2 + 20x + 4

Οπότε ΓΔ2 + ΒΔ 2 = 1 +25x2 + 20x + 4 =

= 25x2 + 20x + 5 =

= ΒΓ2

Πράγμα που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Δ.

**16.**

Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το 0.

Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.

Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.

Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.

Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.

Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που

σκεφτήκατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω οι αριθμοί α και β ≠ 0

Τετράγωνο του αθροίσματός τους = (α + β)2

Τετράγωνο της διαφοράς τους = (α  β)2

Διαφορά = (α + β)2  (α  β)2

Διαίρεση με το γινόμενο = =

= =

=  =  = 4

Επομένως το ζητούμενο ισχύει για οποιουσδήποτε αριθμούς

**17.**

**α)** Να αποδείξετε ότι βγ = 

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα 10cm

και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2cm

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 =  =

=  = = βγ

**β)**

Αν β και γ είναι οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου τότε το εμβαδόν του είναι Ε =  και με βάση την προηγούμενη ταυτότητα Ε =  **(1)**

Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει β2 + γ2 = 102 = 100

Η (1) δίνει Ε = = 24cm2 .

**18.**

Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο

στα δύο του παιδιά όπως φαίνεται

στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν

το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο παιδί

αδικήθηκε ;

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

**Προτεινόμενη λύση**

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι

Το οικόπεδο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις

ΑΒ = α + β και ΒΓ = αβ

Επομένως εμβαδόν

Ε = (α + β)(αβ) = α2β2

Το οικόπεδο ΒΓΚΛΜΝ προκύπτει

αν από το τετράγωνο ΒΓΡΜΝ πλευράς

α αφαιρέσουνε το τετράγωνο ΓΚΛΡ

πλευράς β.

Επομένως το εμβαδόν Ε΄ του

ΒΓΚΛΜΝ είναι Ε΄= α2β2.

Είναι λοιπόν φανερό ότι Ε = Ε΄

Το τρίγωνο του Πασκάλ

**1.**

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

……………………………………………………………………

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός μιας σειράς, εκτός του πρώτου και του τελευταίου που είναι μονάδες, είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών της προηγούμενης σειράς που είναι αριστερά του και δεξιά του.

Παρακάτω φαίνεται ο τρόπος προσδιορισμού των αριθμών της 6ης σειράς από τους αριθμούς της 5ης και οι αριθμοί της 7ης σειράς από τους αριθμούς της 6ης

1 + 4 + 6 + 4 + 1 5η σειρά

|| || || ||

1 5 10 10 5 1 6η σειρά

1 6 15 20 15 6 1 7η σειρά

Για κάθε ανάπτυγμα της μορφής (α + β )ν παρατηρούμε ότι

* οι όροι του αναπτύγματος είναι ν + 1
* το ανάπτυγμα είναι πολυώνυμο ν βαθμού ως προς α και ν βαθμού ως προς β
* το ανάπτυγμα είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του α και τις αύξουσες δυνάμεις του β
* οι όροι που απέχουν εξίσου από τους άκρους όρους έχουν ίσους συντελεστές

**2.**

Μετά από αυτά το ανάπτυγμα (α + β)5 είναι

(α + β )5 = α5 + 5α4β + 10α3 β2 + 10α2 β3 + 5αβ4 + β5

και το (α + β)6 είναι

(α + β) 6 = α6 + 6α5β + 15α4 β2 + 20α3 β3 + 15α2β4 + 6αβ5 + β6

**3.**

Το ανάπτυγμα του (αβ) 6 είναι

(α  β) 6 = α6  6α5β + 15α4 β2  20α3 β3 + 15α2β4  6αβ5 + β6

**4.**

* Το άθροισμα των αριθμών κάθε σειράς είναι δύναμη του 2

πχ για την 2η σειρά : 1 + 1 = 2 = 21

για την 3η σειρά 1 + 2 + 1 = 4 = 22 κ. λ. π

* οι αριθμοί που προκύπτουν από τους όρους κάθε σειράς για τις πέντε πρώτες σειρές είναι δυνάμεις του 11

πχ για την τρίτη σειρά οι όροι της είναι οι 1- 2- 1 που σχηματίζουν τον αριθμό

121 = 11 2

για την τέταρτη σειρά οι όροι της είναι οι 1- 3- 3-1 που σχηματίζουν τον αριθμό

1331 = 113  κ λ π

* οι αριθμοί κάθε σειράς που απέχουν εξίσου από τα άκρα είναι ίσοι

**1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**

**ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 59 – 62**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων

α) 2(xy)( x + y) β) 2 + (xy)( x + y) γ) 4(α – β)2

δ) 4 + (α – β)2 ε) (x + 2y)xy στ) (x + 2y)(xy)

ζ) (α + β)(α + 3β) η) (α + β)(α + 3β) + 1

**Προτεινόμενη λύση**

Γινόμενο είναι οι παραστάσεις (α) , (γ) , (στ) και (ζ)

**2.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

**α)** 8x + 16 = 8( x + 2) **β)** 3αyy2 = y(3αy)

**γ)** 6x2 + 12 x = 6x( x + 2) **δ)** 4x2 + 8x = 4x(x2)

**ε)** ****x +  = (x + 1) **στ)** (x1)2 – (x1) = (x1)(x11) = (x1) (x2)

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**3.**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση .

Η παράσταση 3x3 + 3x2 + x + 1 παραγοντοποιείται ως εξής :

α) 3x2(x + 1) β) ( x + 3)( 3x21) γ) (x + 1)( 3x2 +1) δ) x( 3x2 + x + 1)

**Προτεινόμενη λύση**

3x3 + 3x2 + x + 1 = 3x2( x + 1) + ( x+ 1) = (x + 1)( 3x2 +1) σωστό το (γ)

**4.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** x2 – 22 = (x2)(x + 2) **β)** x29 = (x9)( x + 9)

**γ)** 1122 122 = 100⋅124 **δ)** 4y21 = (4y1)(4y + 1)

**ε)** 4x2α2 = (2x –α)(2x + α) **στ)** α2 – (β1)2 = (α + β1)(αβ1)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (Σ)

**β)** x29 = (x3)( x + 3) άρα (Λ)

**γ)** 1122 122 = (112 12)(112 +12) = 100⋅124 άρα (Σ)

**δ)** 4y21 = (2y1)(2y + 1) άρα (Λ)

**ε)** (Σ)

**στ)** α2 – (β1)2 = [α + (β1)][α  (β1)] = ( α + β 1)(αβ + 1) άρα (Λ)

**5.**

Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου

μέρους είναι (xy)(x + y) αυτό είναι σωστό

ή λάθος ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας .

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν του πράσινου μέρους προκύπτει

αν από το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς x

αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου

πλευράς y

Επομένως πράσινη περιοχή = x2y2 = (x + y)(xy) άρα ο ισχυρισμός είναι σωστός

**6.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

**α)** α3 – 23 = (α2)(α2 + 2α + 4)

**β)** α3 + 33 = ( α + 3)( α2 3α + 9)

**γ)** (2x)3 1 = ( 2x1)(4x2 + 2x + 1)

**δ)** 1 + (5y)3 = (1 + 5y)(1 5y + 25y2)

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**7.**

Nα χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** x353 = ( x5)( x2 5x + 25)

**β)** 8 + α3 = ( 2 + α)( 22 2α + α2)

**γ)** (3y)3 + 1 = ( 3y + 1)( 3y2 3y + 1)

**δ)** 1 (2β)3 = (12β)( 1 + 2β + 4β2)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x353 = ( x5)( x2 + 5x + 25) άρα (Λ)

**β)** (Σ)

**γ)** (3y)3 + 1 = ( 3y + 1)( 9y2 3y + 1) άρα (Λ)

**δ)** (Σ)

**8.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

α) x2 + 6x + 9 = (x + 3 )2 β) 4α2 – 4α + 1= (2α1)2

γ) y4 2y2 + 1 = ( y21)2 δ) 25 + 10x3 + x6 = (5 + x3)2

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**9.**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού πα2 + 2πα + π με α > 0 έχει ακτίνα

α) α + 2 β) α2 + 1 γ) α + 1 δ) π(α + 1)

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο Ε = π ρ2

Η υπόθεση γράφεται πα2 + 2πα + π = π(α2 + 2α + 1) =

= π (α + 1)2

Άρα ρ = α + 1. Σωστό το (γ)

**10.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x2 + (α + β) x + αβ | αβ | α + β | α | β | (x + α)( x + β) |
| x2 + 3x + 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | (x + 2)( x + 1) |
| x2  3x + 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | (x 2)( x 1) |
| x2 + 5x  6 | 6 | 5 | 6 | 1 | (x + 6)( x 1) |
| x2 + 5x + 6 | 6 | 5 | 3 | 2 | (x + 3)( x + 2) |
| x2  x  2 | 2 | 1 | 2 | 1 | (x 2)( x + 1) |
| x2 + x  2 | 2 | 1 | 2 | 1 | (x + 2)( x 1) |

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**11.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

**α)** x2 + ( α + 2) x + 2α = ( x + α)( x + 2)

**β)** x2 + (  + )x +  = ( x +)( x + )

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**Ασκήσεις**

**1.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 3α + 6β **β)** 2x8 **γ)** 8ω2 + 6ω

**δ)** 9x2 – 6x **ε)** 8α2β + 4αβ2 **στ)** 2x2 – 2xy + 2x

**ζ)** α2β + αβ2 –αβ **η)** 2α3 – 4α2 + 6α2β **θ)** xy y + y2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 3α + 6β = 3( α + 2β)

**β)** 2x8 = 2(x–4)

**γ)** 8ω2 + 6ω = 2ω( 4ω+ 3)

**δ)** 9x2 – 6x = 3x(3x +2)

**ε)** 8α2β + 4αβ2 = 4αβ(2α + β)

**στ)** 2x2 – 2xy + 2x =2x(xy + 1)

**ζ)** α2β + αβ2 – αβ = αβ( α + β 1)

**η)** 2α3 – 4α2 + 6α2β = 2α2(α2 + 3β)

**θ)** xy y + y2 =y(x  +y) =y(x 3 + 2y)

**2.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x( αβ) + y(αβ) **β)** α(x + y) + β( x + y) **γ)** ( 3x1)(x2) (x + 4) (x2)

**δ)** α2(α2) 3(2α) **ε)** 4x(x1) – x + 1 **στ)** 2x2 (x3) 6x(x3)2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x(αβ) + y(αβ) = (αβ)(x + y)

**β)** α(x + y) + β( x + y) = ( x + y)(α + β)

**γ)** (3x1)(x2)  (x + 4) (x2) = (x2) [(3x1)  (x + 4)] =

= (x2)(3x1x4) = (x2)(2x5)

**δ)** α2(α2) 3(2α) = α2(α2) +3 ( α2) = (α2)(α2 + 3)

**ε)** 4x(x1) – x + 1 = 4x(x1) – (x1) = (x1)(4x1)

**στ)** 2x2 (x3) 6x(x3)2 = 2x(x3) [x3(x3)] =

= 2x(x3)(x3x + 9) =

= 2x(x3)( 2x + 9)

**3.**

**i)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) x2 + x β) 2y25y γ) ω(ω3)2(3ω) δ) α(3α + 1)4α

**ii)** Να επιλύσετε τις εξισώσεις

α) x2 + x = 0 β) 2y2 = 5y γ) ω(ω3) 2(3ω) = 0 δ) α(3α + 1) = 4α

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** α) x2 + x = x ( x + 1)

β) 2y25y = y(2y5)

γ) ω(ω3) 2(3ω) = ω(ω3) + 2(ω3) = (ω3)(ω + 2)

δ) α(3α + 1) 4α = 3α2 + α 4α =3α2 3α = 3α(α1)

**ii)** Λαμβάνοντας υπ’ όψη το (i) έχουμε

α) x2 + x = 0 άρα x ( x +1) = 0

x = 0 ή x + 1 = 0

x = 0 ή x = 1

β) 2y2 = 5y άρα 2y25y = 0

y(2y5) = 0

y = 0 ή 2y5 = 0

y = 0 ή y = 

γ) ω(ω3) 2(3ω) = 0 άρα (ω3)(ω + 2) = 0 ή

ω3 = 0 ή ω + 2 = 0

ω = 3 ή ω =  2

δ) α(3α + 1) = 4α άρα α(3α + 1) 4α = 0

3α(α1) = 0

α = 0 ή α1 = 0

α = 0 ή α = 1

**4.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x2 + xy + αx + αy **β)** x3 – x2 + x1 **γ)** x3 – 5x2 + 4x 20

**δ)** 2x33x2 + 4x6 **ε)** 4x28x –αx + 2α **στ)** 9αβ 18β2 +10β 5α

**ζ)** 12x2 – 8xy 15 x + 10 y **η)** x3 + x2 + x + **θ)**x2 + 2x x 2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + xy + αx + αy = x( x + y) + α(x + y) = ( x + y)( x + α)

**β)**

x3 – x2 + x1 = x2(x1) + (x1) = ( x1)( x2 + 1)

**γ)**

x3 – 5x2 + 4x 20 = x2(x5) + 4(x5) = (x5)(x2 + 4)

**δ)**

2x33x2 + 4x6 = x2(2x3) + 2(2x3) = (2x3)(x2 + 2)

**ε)**

4x28x αx + 2α = 4x(x2) – α(x2) = (x2)(4xα)

**στ)**

9αβ 18β2 +10β 5α = 9β(α2β) 5(α2β) = (α2β)(9β5)

**ζ)**

12x2 – 8xy 15 x + 10 y = 4x( 3x2y) 5(3x2y) = (3x2y)(4x5)

**η)**

x3 + x2 + x + = x2 + = (x2 + 1)

**θ)**

x2 + 2x x 2 =x –  = (x1)

**5.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 7α2 + 10αβ + 3β2 **β)** 5x2 8xy + 3y2 **γ)** 3x2 –xy 2y2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

7α2 + 10αβ + 3β2 = 7α2 + 7αβ + 3αβ + 3β2 =

= 7α(α + β) + 3β(α + β) =

= (α + β) (7α + 3β)

**β)**

5x2 8xy + 3y2 = 5x2 5xy 3xy + 3y2 =

= 5x(xy) 3y(xy) =

= (xy)(5x3y)

**γ)**

3x2 –xy 2y2 = 3x2 –3xy + 2xy2y2 =

= 3x(xy) +2y(xy) =

= (xy)(3x + 2y)

**6.**

**α)** Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση α2β + αβ2 – α – β

**β)** Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει α2β + αβ2 = α + β , να αποδείξετε ότι οι

αριθμοί α και β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

α2β + αβ2 –α – β = αβ( α + β) – (α + β) = ( α + β)(αβ1)

**β)**

α2β + αβ2 = α + β άρα α2β + αβ2 –α – β = 0 και με βάση το (α)

(α + β)(αβ1) = 0 άρα

α + β = 0 ή αβ1 = 0

α = – β ή αβ = 1

α , β αντίθετοι ή αντίστροφοι

**7.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 2α2 2α + αβ – β + αx –x **β)** 2αβ  4β + 5α 10 + 2αγ 4γ

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

2α2 2α + αβ – β + αx – x = 2α(α1) + β(α1) + x(α1) = (α1)(2α + β + x)

**β)**

2αβ  4β + 5α –10 + 2αγ4γ =2β(α2) + 5(α2) + 2γ(α2) = (α2)(2β + 5 + 2γ)

**8.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x29 **β)** 16x2 – 1 **γ)** α2 – 9β2

**δ)** α2β2 4 **ε)** 36ω2 (ω + 5) 2 **στ)** 4(x + 1) 29(x 2)2

**ζ)**  16 **η)** x23 **θ)** x2 2y2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x29 = x232 = (x + 3)(x3)

**β)**

16x2 – 1 = (4x)212= (4x + 1)(4x1)

**γ)**

α2 – 9β2 = α2 – (3β)2 = (α + 3β)(α3β)

**δ)**

α2β2  4 = (αβ)2 22= (αβ + 2)(αβ2)

**ε)**

36ω2 (ω + 5) 2 = (6ω)2 (ω + 5)2 =

= [6ω + (ω + 5)][6ω (ω+5)] =

= (6ω + ω + 5)(6ωω5) =

= (7ω +5)(5ω5) =

= 5(7ω +5)(ω1)

**στ)**

4(x + 1)2 9(x 2)2 = [2(x + 1)]2 [3(x 2)]2 =

= [2(x + 1) + 3(x 2)] [2(x + 1)3(x 2)] =

= (2x + 2 + 3x 6)(2x + 23x +6) =

= ( 5x4)(8x)

**ζ)**

 16 =  42 = 

**η)**

x23 = x2= 

**θ)**

x2 2y2  = x2= 

**9.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 2x2 – 32 **β)** 287y2 **γ)** 2x32x **δ)** 5αx2 – 80α **ε)** 2(x1)2 8

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

2x2 – 32 = 2 (x2 – 16 ) = 2(x + 4)(x – 4)

**β)**

287y2 = 7 (4 – x2 ) = 7(2 + y)(2 – y)

**γ)**

2x32x = 2x(x2 – 1) = 2x(x + 1)(x–1)

**δ)**

5αx2 – 80α = 5α(x2 – 16 ) = 5α(x + 4)(x – 4)

**ε)**

2(x1)2 8 = 2[(x – 1)2 – 4] = 2(x–1 + 2)(x–1–2) = 2(x +1)(x–3)

**10.**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε

την πλευρά γ όταν

**α)** α = 53 , β = 28

**β)** α = 0 , 37 , β = 0,12

**γ)** α = 26λ , β = 10λ

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

γ2 = α2 – β2 = 532–282 =

= (53 +28)(53–28) =

= 81∙25 άρα γ =  = 9∙5 = 45

**β)**

γ2 = 0,372– 0,122 = (0,37 + 0,12)(0,37– 0,12) =

= 0,49∙0,25 άρα γ =  = 0,7 ∙ 0,5 = 0,35

**γ)**

γ2 = (26λ)2–(10λ)2 = (26λ+ 10λ) (26λ – 10λ) =

= λ( 26 +10)λ(26 – 10) =

= λ236∙16 άρα γ = = λ ∙ 6 ∙ 4 = 24λ

**11.**

Να επιλύσετε τις εξισώσεις

**α)** x2 – 49 = 0 **β)** 9x3 – 4x = 0 **γ)** x(x + 1)2 = 4x **δ)** ( x + 2) 3 = x + 2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 – 49 = 0 άρα (x + 7)(x–7) = 0

x + 7 = 0 ή x – 7 = 0

x = –7 ή x = 7

**β)**

9x3 – 4x = 0 άρα x ( 9x2 – 4) = 0 ή

x(3x + 2)(3x –2) = 0

x = 0 ή 3x + 2 = 0 ή 3x – 2 = 0

x = 0 ή x =  ή x = 

**γ)**

x(x + 1)2 = 4x άρα x(x + 1)2 – 4x = 0

x [( x +1) 2–4] = 0

x(x + 1+ 2)(x + 1 – 2) = 0

x (x + 3)( x – 1) = 0

x = 0 ή x + 3 = 0 ή x – 1 = 0

x = 0 ή x = –3 ή x = 1

**δ)**

(x + 2)3 = x + 2 άρα (x + 2)3 – ( x + 2) = 0

(x + 2)[( x + 2) 2–1] = 0

(x + 2)( x + 2 + 1)( x + 2 –1) = 0

x + 2 = 0 ή x + 3 = 0 ή x + 1 = 0

x = –2 ή x = –3 ή x = –1

**12.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x3 – 27 **β)** y3 + 8 **γ)** ω3 + 64 **δ)** 8x3 1 **ε)** 27y3 + 1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x3 – 27 = x3 – 33 = ( x–3)(x2 + 3x + 32) = ( x–3)(x2 + 3x + 9)

**β)**

y3 + 8 = y3 + 23 = (y +2)(y2 – 2y + 22) = (y +2)(y2 – 2y + 4)

**γ)**

ω3 + 64 = ω3 + 43 = (ω + 4)(ω2– 4ω + 42) = (ω + 4)(ω2 – 4ω + 16)

**δ)**

8x3 1 = (2x)3 –13 = (2x –1)[(2x)2 + 2x∙1 + 12] = (2x – 1)(4x2 + 2x + 1)

**ε)**

27y3 + 1 = (3y)3 + 13 = ( 3y +1)[(3y)2 –3y∙1 + 12] = ( 3y +1)(9y2 – 3y + 1)

**13.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 3x3 – 24 **β)** 16α 4 + 2α **γ)** πR3 πρ3 **δ)** α4 β + αβ4

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

3x3 – 24 = 3(x3 – 8) = 3(x3 – 23 ) = 3(x – 2)(x2 + 2x + 22) = 3(x–2)(x2 + 2x + 4)

**β)**

16α 4 + 2α = 2α(8α3 + 1) = 2α [(2α)3 + 13] =

= 2α(2α +1)[(2α)2 – 2α∙1 + 12] =

= 2α(2α +1)(4α2 – 2α + 1)

**γ)**

πR3 πρ3 =π(R3–ρ3) = π(R – ρ) (R2 + R ρ + ρ2)

**δ)**

α4 β + αβ4 = αβ(α3 + β3) = αβ(α + β)(α2 – αβ + β2)

**14.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** x3  27= (x3)(x2+ 3x + 9) **β)** 8x3+ y3 = (2x + y)( 4x2  2xy + y2)

**γ)** α3  8β3= (α2β) (α2 + 2αβ + 4β2) **δ)** α3 + 125β3 = (α + 5β) (α25αβ + 25β2)

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**15.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x2 2x + 1 **β)** y2 + 4y + 4 **γ)** ω2 6ω + 9 **δ)** α2 + 10α + 25

**ε)** 14β + 4β2 **στ)** 9x4 + 6x2 + 1 **ζ)** 4y2 12 y + 9 **η)** 16x2 + 8xy + y2

**θ)** 25α2 – 10αβ + β2 **ι)** (α + β)2 2(α + β) + 1 **κ)** 2y + 9 **λ)** x2 + x + 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 2x + 1 = (x – 1)2

**β)**

y2 + 4y + 4 = (y + 2)2

**γ)**

ω2 6ω + 9 = (ω – 3)2

**δ)**

α2 + 10α + 25 = (α + 5)2

**ε)**

14β + 4β2 = (1 – 2β)2

στ) 9x4 + 6x2 + 1 = (3x2 + 1)2

**ζ)**

4y2 12 y + 9 = (2y – 3)2

**η)**

16x2 + 8xy + y2 = (4x + y) 2

**θ)**

25α2 – 10αβ + β2 = (5α – β)2

**ι)**

(α + β)22(α + β) + 1= [(α + β) –1]2 = (α + β – 1)2

**κ)**

2y + 9 = 

**λ)**

x2 + x +  = 

**16.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 3x2 + 24 x + 48 **β)** y2 + 4y 4 **γ)** 2α2 8αβ + 8β2 **δ)** 4α3 + 12α2 + 9α

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

3x2 + 24 x + 48 = 3(x2 + 8x + 16) = 3( x + 4)2

**β)**

y2 + 4y 4 = – ( y2 – 4y + 4) = – (y – 2)2

**γ)**

2α2 8αβ + 8β2 = 2(α2 – 4αβ + 4β2) = 2(α – 2β)2

**δ)**

4α3 + 12α2 + 9α = α (4α2 + 12α + 9 ) = α(2α + 3)2

**17.**

**α)** Να βρείτε ένα πολυώνυμο που να

εκφράζει το εμβαδόν του διπλανού

σχήματος

**β)** Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου

που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν

του διπλανού σχήματος.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από το ανοιχτό

καφέ τετράγωνο πλευράς x, το πορτοκαλί ορθογώνιο διαστάσεων 2x και y και το κίτρινο τετράγωνο πλευρά y.

Επομένως το εμβαδόν του Ε είναι Ε = x2 + 2xy + y2

**β)**

Επειδή x2 + 2xy + y2 = ( x + y) 2, το ζητούμενο τετράγωνο έχει πλευρά x + y

**18.**

Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου που

έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού

τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν Ε του διπλανού σχήματος είναι

Ε = (ΔΓΕ) + ( ΔΑΕ) + (ΓΑΒ) =

=  + +  =

=  =  = x2 + 2x + 1= ( x + 1) 2

Άρα το ζητούμενο τετράγωνο έχει πλευρά x + 1.

**19.**

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

**α)** x2 + 3x + 2 **β)** y2 4y + 3 **γ)** ω2 + 5ω + 6 **δ)** α2 + 6α + 5

**ε)** x27x + 12 **στ)** y2y12 **ζ)** ω29ω + 18 **η)** α2 + 3α 10

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + 3x + 2 = (x+ 1)(x + 2)

**β)**

y2 4y + 3 = (y – 1)(y – 3)

**γ)**

ω2 + 5ω + 6 = (ω + 2)(ω + 3)

**δ)**

α2 + 6α + 5 = (α + 1)( α + 5)

**ε)**

x27x + 12 = (x – 3)(x – 4)

**στ)**

y2y12 = (y – 4)( y + 3)

**ζ)**

ω29ω + 18 = (ω – 3)(ω – 6)

**η)**

α2 + 3α 10 = (α + 5)( α –2)

**20.**

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

**α)** x2 + x + 2 **β)** x2 + (2α + 3β)x + 6αβ **γ)** x2 + x  3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + x + 2 = ( x + 2) 

**β)**

x2 + (2α + 3β)x + 6αβ = (x + 2α)(x + 3β)

**γ)**

x2 + x  3 = (x + 3) 

**21.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** 2ω2 + 10ω + 8 **β)** 3α212α15 **γ)** αx27αx + 6α

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

2ω2 + 10ω + 8 = 2(ω2 + 5ω + 4) = 2(ω + 1 )(ω + 4)

**β)**

3α212α15 = 3( α2 – 4α – 5) = 3(α –5)(α + 1)

**γ)**

αx27αx + 6α = α(x2 –7x + 6) = α(x – 1)(x – 6)

**22.**

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

**α)** 1453⋅1821 1453⋅821 **β)** 8012 + 199⋅801 **γ)** 99824

**δ)** 999⋅1001 + 1 **ε)** 9992 + 2⋅999 + 1 **στ)** 972 + 6⋅97 + 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

1453⋅1821 1453⋅821 = 1453(1821 – 821) = 1453 ∙ 1000 = 1453000

**β)**

8012 + 199 ⋅ 801 = 801(801 + 199) = 801∙1000 = 801000

**γ)**

9982 4 = (998 + 2)(998 – 2) = 996 ∙1000 = 996000

**δ)**

999⋅1001 + 1 = ( 1000 –1)( 1000 + 1) + 1= 10002 – 1 + 1 = 10002 = 1000000

**ε)**

9992 + 2⋅999 + 1 = ( 999 + 1)2 = 10002 = 1000000

**στ)**

972 + 6⋅97 + 9 = (997 + 3) 2 = 10002 = 1000000

**23.**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)** x2y2 4y2x2 + 4 **β)** x41 + x3 x **γ)** x3( x21) + 1x2

**δ)** (x2 + 9) 236x2 **ε)** α22αβ + β2 – α + β **στ)** x22xy + y2 – ω2

**ζ)** 1α2 + 2αβ  β2 **η)** y2x210y + 25 **θ)**2(x1)(x24)5(x1)(x2)2

**ι)** (y24)2 – ( y + 2)2 **ια)** (α2 + β2 –γ2)24α2β2 **ιβ)** (x2 + 9) (α2 + 4) – (αx + 6)2

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2y2 4y2x2 + 4 = y2(x2 – 4) – ( x2– 4) =

= (x2–4) (y2–1) =

= (x + 2)(x – 2)(y + 1)(y – 1)

**β)**

x41 + x3 x = x3( x + 1)  (x + 1) =

= (x +1)( x31) =

= ( x + 1)( x1)( x2 + x + 1)

**γ)**

x3( x21) + 1x2 = x3( x21) – (x21) =

= (x21)(x31) =

= (x1)(x + 1)( x1) ( x2 + x + 1) =

= ( x1)2 ( x + 1)( x2 + x + 1)

**δ)**

(x2 + 9) 236x2 = (x2 + 9) 2(6x)2 =

= (x2 + 9 + 6x)( x2 + 9 6x) =

= (x + 3)2 (x3)2

**ε)**

α22αβ + β2  α + β = (αβ)2 (αβ) =

= (αβ)(αβ1)

**στ)**

x22xy + y2 – ω2 = (xy)2 –ω2 =

= (xy + ω)(xy – ω)

ζ)

1α2 + 2αβ  β2 = 1 ( α2 2αβ + β2) =

= 1 (αβ)2 =

= [1 (αβ)][1 + ( αβ)] =

= (1α + β)( 1 + αβ)

**η)**

y2x210y + 25 = (y5)2 – x2 =

= (y5 + x)(y5x)

**θ)**

2(x1)(x24)5(x1)(x2)2 = 2(x1)(x2)(x +2) 5(x1)(x2)2 =

= (x1)(x2)[2(x + 2) 5(x2)] =

= (x1)(x2)(2x + 4 5x + 10) =

= (x1)(x2)(3x + 14)

**ι)**

(y24)2 – ( y + 2)2 = [(y2)(y + 2)]2 – (y + 2)2 =

= (y2)2(y + 2)2 – (y + 2)2 =

= (y + 2)2[(y2)21] =

= (y + 2)2 (y2 + 1)(y21) =

= (y + 2)2 (y1)(y3)

**ια)**

(α2 + β2 – γ2)24α2β2 = (α2 + β2 – γ2)2(2αβ)2 =

= (α2 + β2 – γ2 + 2αβ)(α2 + β2 – γ22αβ)=

= [( α + β)2γ2] [(αβ)2γ2] =

= (α + β + γ)(α + βγ)(αβ + γ)(αβγ)

**ιβ)**

(x2 + 9) (α2 + 4) – (αx + 6)2 = α2x2 + 4x2+ 9α2 + 36 – (α2x2 + 12αx + 36) =

= α2x2 + 4x2+ 9α2 + 36 – α2x2 12αx36 =

= 4x2 + 9α212αx = (2x 3α)2

**24.**

Ενός ορθογωνίου οι διαστάσεις x , y

μειώθηκαν , επειδή έπρεπε να αυξηθεί

το πλάτος των διπλανών δρόμων.

Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που

απέμεινε είναι xy – x –2y + 2 να βρείτε

ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε

διάστασης.

**Προτεινόμενη λύση**

xy – x –2y + 2 = x(y1) 2(y1) = (y1)(x2)

Άρα η διάσταση αρχικού μήκους x έγινε x2,

ενώ η διάσταση αρχικού μήκους y έγινε y1

**1.7 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 66 – 67**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

**i)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το 4x + 7 είναι πολυώνυμο

α) 1ου βαθμού β) 2ου βαθμού γ) 3ου βαθμού δ) σταθερό

**ii)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το x2 4x + 9 δεν μπορεί να

είναι α) 5 β) 3x2 γ) x2 + 3 δ) 4x

**iii)** Αν ένα πολυώνυμο Ρ(x) διαιρούμενο με το 2x2 + x + 5 δίνει πηλίκο x4 + x2

τότε ο βαθμός του Ρ(x) είναι

α) 4 β) 6 γ) 8 δ) οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** Σταθερό άρα σωστό το (δ)

**ii)** x2 + 3 άρα σωστό το (γ)

**iii)** 6 άρα σωστό το (β)

**2.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Βαθμός διαιρετέου | Βαθμός διαιρέτη | Βαθμός πηλίκου |
| 8 | 3 | 5 |
| 7 | 5 | 2 |
| 9 | 6 | 3 |

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραοάνω

**3.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν

είναι λανθασμένες.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Το πηλίκο της διαίρεσης του (2x +1)(x + 3) με το 2x +1 είναι x + 3 (Σ)

**β)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το x + 6 είναι το x2 + 2 (Λ)

**γ)** Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού με ένα πολυώνυμο

2ου βαθμού τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού (Λ)

**δ)** Το x4 είναι παράγοντας του x2 16 (Σ)

**ε)** Το πηλίκο της διαίρεσης (x3 +1) : (x +1) είναι το x2 –x + 1 (Σ)

Για το δ) ισχύει x216 = (x4)(x + 4) και για το ε) x3 + 1= (x + 1)(x2x + 1)

**Ασκήσεις**

**1.**

Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

**α)**  (2x3 + x2 – 3x + 6) : (x + 2) **β)** (6x3  x2 – 10x + 5) : (3x +1)

**γ)** (6x4  x2 + 2x  7) : (x 1) **δ)** (4x3 + 5x 8 ) : (2x 1)

**ε)**  (x5 x4 + 3x2 + 2) : (x2x + 2) **στ)** (9x4 – x2 + 2x 1 ) : (3x2x +1)

**ζ)** (8x4  6x2  9) : (2x2 3) **η)** (3x5 2x3 4 ) : (3x2 1)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

|  |  |
| --- | --- |
| 2x3 + x2 – 3x + 6  2x3 4x2 | x + 2 |
| 3x2 – 3x + 6  3x2 + 6x | 2x23x+ 3 |
| 3x + 6  3x 6 |  |
| 0 |

Ταυτότητα διαίρεσης : 2x3 + x2 – 3x + 6 = (x + 2)(2x23x+ 3)

**β)**

|  |  |
| --- | --- |
| 6x3  x2 – 10x + 5  -6x32x2 | 3x + 1 |
| 3x2 – 10x + 5  3x2 + x | 2x2x  3 |
| 9x + 5  9x + 3 |  |
| 8 |

Ταυτότητα διαίρεσης : 6x3  x2 – 10x + 5= (3x + 1)(2x2x  3) + 8

**γ)**

|  |  |
| --- | --- |
| 6x4  x2 + 2x  7  6x4 + 6x3 | x 1 |
| 6x3  x2 + 2x 7  6x3 + 6x2 | 6x3 + 6x2+ 5x+7 |
| 5x2 + 2x 7  5x2 + 5x |  |
| 7x7  7x+7 |
| 0 |

Ταυτότητα διαίρεσης : 6x4x2 + 2x7= (x 1)( 6x3 + 6x2+ 5x+7)

**δ)**

|  |  |
| --- | --- |
| 4x3 + 5x – 8  4x3 + 2x2 | 2x–1 |
| 2x2 + 5x– 8  2x2 + x | 2x2 + x+ 3 |
| 6x  8  6x + 3 |  |
| 5 |

Ταυτότητα διαίρεσης : 4x3 + 5x – 8= (2x 1)(2x2 + x+ 3)5

**ε)**

|  |  |
| --- | --- |
| x5 x4 + 3x2 + 2  x5  + x42x3 | x2x + 2 |
| 2x3 + 3x2 + 2  2x3 2x2 + 4x | x32x + 1 |
| x2 + 4x + 2  x2 + x 2 |  |
| 5x |

Ταυτότητα διαίρεσης : x5 x4 + 3x2 + 2= (x2x + 2)(x32x + 1) + 5x

**στ)**

|  |  |
| --- | --- |
| 9x4  – x2 + 2x 1  9x4  + 3x33x2 | 3x2x +1 |
| 3x3 4x2 + 2x1  3x3 + x2  x | 3x2 + x  1 |
| 3x2 + x  1  3x2  x + 1 |  |
| 0 |

Ταυτότητα διαίρεσης : 9x4 – x2 + 2x 1= (3x2x +1)(3x2 + x  1)

**ζ)**

|  |  |
| --- | --- |
| 8x4  6x2  9  8x4 +12x2 | 2x2 3 |
| 6x2 – 9  6x2 + 9 | 4x2+ 3 |
| 0 |  |

Ταυτότητα διαίρεσης : 8x4 6x2  9= (2x23)(4x2+ 3)

**η)**

|  |  |
| --- | --- |
| 3x5 2x3 4  3x5 + x3 | 3x2 1 |
| x3  – 4  x3 x | x3x |
| x– 4 |  |

Ταυτότητα διαίρεσης : 3x52x3 4= (3x21)  – 4

**2.**

Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι οι διαιρέσεις σωστές

**α)** **β)**

|  |  |
| --- | --- |
| 6x2 + 22x + 12  6x2  4x | 3x + 2 |
| 2x + 6 |
| 18x + 12  18x 12 |  |
| 0 |

|  |  |
| --- | --- |
| 2x3 + 10x2 + 2x + 20  2x36x2 | x + 3 |
| 2x2 + 4x10 |
| 4x2 + 2x + 20  4x2 12x |  |
| 10x + 20  10x + 30 |
| 50 |

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**3.**

Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το x2x + 1 δίνει πηλίκο 2x + 3 και υπόλοιπο

3x + 2

**Προτεινόμενη λύση**

Αν Ρ(x) είναι το ζητούμενο πολυώνυμο, τότε με βάση την ταυτότητα της διαίρεσης

αυτό είναι ίσο με Ρ(x) = (x2x + 1)(2x + 3) + 3x + 2 =

= 2x3 + 3x22x23x + 2x + 3 + 3x + 2 =

= 2x3 + x2+ 2x +5

**4.**

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) είναι διαιρέτης του Ρ(x) όταν

**α)** Ρ(x) = 6x3 – 7x2 + 9x 18 και Q(x) = 2x3

**β)** Ρ(x) = 2x4 – x2 + 5x 3 και Q(x) = x2 + x1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Εκτελούμε την διαίρεση Ρ(x) : Q(x)

|  |  |
| --- | --- |
| 6x3  – 7x2 + 9x 18  6x3  + 9x2 | 2x3 |
| 2x2 + 9x18  2x2 + 3x | 3x2 + x + 6 |
| 12 x  18  12 x + 18 |  |
| 0 |

Αφού η διαίρεση είναι τέλεια το πολυώνυμο Q(x) είναι διαιρέτης του Ρ(x).

**β)**

|  |  |
| --- | --- |
| 2x4  – x2 + 5x 3  2x4  2x3+ 2x2 | x2 + x1 |
| 2x3 + x2 + 5x3  2x3 + 2x22x | 3x2 + x + 6 |
| 3x2 + 3x 3  3x2 3x + 3 |  |
| 0 |

Αφού η διαίρεση είναι τέλεια το πολυώνυμο Q(x) είναι διαιρέτης του Ρ(x).

**5.**

**α)** Να κάνετε την διαίρεση (x42x3 8x2 + 18x 9) : (x29)

**β)** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο x42x3 8x2 + 18x 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

|  |  |
| --- | --- |
| x42x3 8x2 + 18x 9  x4  + 9x2 | x29 |
| 2x3 + x2 + 18x9  2x3 18x | x2 2x + 1 |
| x2  9  x2 + 9 |  |
| 0 |

**β)**

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι

x42x3 8x2 + 18x 9 = ( x29)( x2 2x + 1) = ( x3)(x + 3)( x1)2

**6.**

**α)** Να αποδείξετε ότι το x + 1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου

x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1

**β)** Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Εκτελούμε την διαίρεση (x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1) : (x + 1)

|  |  |
| --- | --- |
| x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1  x4  x3 | x +1 |
| 3x3 + 6 x2 + 4x +1  3x3  3x2 | x3 + 3x2+ 3x+1 |
| 3x2 + 4x +1  3x2  3x |  |
| x + 1  x1 |
| 0 |

Αφού η διαίρεση είναι τέλεια, το πολυώνυμο x +1 είναι παράγοντας του

x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1

**β)**

από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι

x4 + 4x3 + 6x2 + 4x + 1= (x +1)( x3 + 3x2+ 3x+1) = (x + 1)( x + 1)3= (x+1)4

**7.**

Ένας μαθητής ήθελε να παραγοντοποιήσει την παράσταση α3 + β3 και θυμήθηκε ότι αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων από τους οποίους ο ένας είναι ο α + β. Επειδή

είχε ξεχάσει τον άλλο παράγοντα πως θα μπορούσε να τον βρει ;

**Προτεινόμενη λύση**

Εκτελούμε την διαίρεση (α3 + β3): (α + β) θεωρώντας μεταβλητή το α

|  |  |
| --- | --- |
| α3 + β3  α3 α2β | α + β |
| α2β + β3  α2β + αβ2 | α2 αβ + β2 |
| αβ2 + β3  αβ2β3 |  |
| 0 |

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι α3 + β3 = (α + β)( α2 αβ + β2).

Άρα ο άλλος παράγοντας είναι ο α2 αβ + β2

**8.**

Δίνεται το πολυώνυμο Ρ(x) = (x3 + 2)(x25) + 4x2 6x + 7. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

**α)** Ρ(x) : ( x3 + 2) **β)** P(x) : ( x2  5)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Αφού Ρ(x) = (x3 + 2)(x25) + 4x26x + 7

η διαίρεση Ρ(x) : ( x3 + 2) δίνει

πηλίκο π(x) = x25 και υπόλοιπο υ(x) = 4x2 6x + 7

**β)**

Τώρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο διότι ο βαθμός του 4x2 6x + 7

είναι ίδιος με τον βαθμό του x25 και επομένως δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο διαίρεσης με διαιρέτη το x25.

|  |  |
| --- | --- |
| 4x2  6x + 7  4x2 + 20 | x2  5 |
| 6x + 27 | 4 |

Εκτελούμε τη διαίρεση

Άρα 4x2 6x + 7 = 4(x2  5) 6x + 27

Το Ρ(x) γίνεται Ρ(x) = (x3 + 2)(x25) + 4(x2  5)6x + 27 =

= (x25)( x3 + 2 + 4) 6x + 27 =

= (x25)( x3 + 6 )6x + 27

Συνεπώς το πηλίκο της διαίρεσης P(x) : ( x2  5) είναι π(x) = x3+ 6 και το υπόλοιπο υ(x) = 6x + 27.

Παρατήρηση : Θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το Ρ(x) από την δοσμένη σχέση και να εκτελέσουμε την διαίρεση P(x) : ( x2  5)

**9.**

Να κάνετε την διαίρεση (6x3 + α) : (x1) και να βρείτε την τιμή του α για την οποία

είναι τέλεια.

**Προτεινόμενη λύση**

|  |  |
| --- | --- |
| 6x3  + α  6x3 + 6x2 | x1 |
| 6x2 + α  6x2 + 6x | 6x2 + 6x + 6 |
| 6x + α  6x + 6 |  |
| α + 6 |

Για να είναι η διαίρεση τέλεια πρέπει α + 6 = 0 άρα α =6

**10.**

Αν ένας παράγοντας του πολυωνύμου 2x3 –x2 4x + 3 είναι ο (x1)2, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

**Προτεινόμενη λύση**

Φέρνουμε το πολυώνυμο (x1)2 στην τελική μορφή : (x1)2 = x22x + 1

Εκτελούμε την διαίρεση (2x3 – x2 4x + 3 ) : (x22x + 1)

|  |  |
| --- | --- |
| 2x3 –x2 4x + 3  2x3 + 4x2 2x | x22x + 1 |
| 3x2 6x+ 3  3x2 + 6x 3 | 2x+ 3 |
| 0 |  |

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε 2x3 –x2 4x + 3 = (x22x + 1) (2x+ 3), οπότε ο άλλος παράγοντας είναι ο 2x+ 3.

**11.**

Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου

που έχει σχήμα ορθογωνίου χρησιμοποιήσαμε 45

πλακάκια τύπου Α, 56 πλακάκια τύπου Β και

16 πλακάκια τύπου Γ.

Αν το πλάτος του δωματίου είναι 5x + 4y, ποιο

είναι το μήκος του ;

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν Ε του δαπέδου είναι ίσο με το

άθροισμα των εμβαδών των πλακιδίων που

χρησιμοποιήσαμε.

Επομένως Ε = 45x2 + 56xy + 16y2

Εκτελούμε την διαίρεση (45x2 + 56xy + 16y2) : (5x + 4y) θεωρώντας μεταβλητή το x

|  |  |
| --- | --- |
| 45x2 + 56xy + 16y2  45x2  36xy | 5x + 4y |
| 20xy + 16y2  20xy 16y2 | 9x+ 4y |
| 0 |  |

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε 45x2 + 56xy + 16y2  = (5x + 4y)( 9x+ 4y) Οπότε το μήκος του δωματίου είναι ίσο με 9x+ 4y

**1.8 Ε. Κ. Π ΚΑΙ Μ. Κ. Δ ΑΚΕΡΑΙΩΝ**

**ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 69 – 70**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α το ΕΚΠ τους από την στήλη Β.

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. x4(x + 2)2 , x( x + 2)3 | 1. 6x2 ( x + 2)2 |
| β. x3(x + 2) , x ( x + 2)3 | 2. x3 ( x + 2)3 |
| γ. 6x2 (x + 2) , 2x( x + 2)2 | 3. 6x2 ( x + 2) |
|  | 4. x4 ( x + 2)3 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| α | β | γ |
| 4 | 2 | 1 |

**Προτεινόμενη λύση**

α→4 , β→2, γ→1

Ο συμπληρωμένος πίνακας φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το ΕΚΠ των παραστάσεων Α , Β.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A  B | 4x3 | 2x(x1) | 9(x1)2 |
| 6x2 | 12x3 | 6x2 (x1) | 18x2 (x1)2 |
| x2(x1) | 4x3 (x1) | 2x2(x1) | 9x2 (x1)2 |
| 8x5 | 8x5 | 8x5(x1) | 72x5 (x1)2 |

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**3.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α το ΜΚΔ τους από την στήλη Β.

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. 6x3(x + 1) 2 , 3x( x + 1)3 | 1. 6x2 ( x + 1)2 |
| β. 2x2(x + 1)3 , 3x4 ( x + 1)2 | 2. 3x( x + 1)2 |
| γ. 3x2 (x + 1) , 6x3( x + 1)2 | 3. 3x2 ( x + 1) |
|  | 4. x2 ( x + 1)2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| α | β | γ |
| 2 | 4 | 3 |

**Προτεινόμενη λύση**

α→2 , β→4, γ→3

Ο συμπληρωμένος πίνακας φαίνεται παραπάνω

**4.**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το ΜΚΔ των παραστάσεων Α , Β.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A  B | 3x2 | x4(x2)2 | 6(x2)3 |
| 6x(x2)2 | 3x | x(x2)2 | 6(x2)2 |
| 2x3(x2) | x2 | x3(x2) | 2(x2) |
| 3x3 (x2)3 | 3x2 | x3 (x2)2 | 3(x2)3 |

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**Ασκήσεις**

**1.**

Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των παραστάσεων

**α)** 12 x3 y2 ω2 18 x2 y ω3  24 x2 y3 ω4

**β)** 15 αxy3 10α x2 ω2 5yω2

**γ)** 2x2( x + y)2 3xy3( x + y)2 8x2y(xy)( x + y)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Είναι 12 x3 y2 ω2 = 3∙22x3 y2 ω2

18 x2 y ω3 = 2 ∙32 x2 y ω3

24 x2 y3 ω4 =3∙23 x2 y3 ω4

Άρα ΕΚΠ = 32∙23 x3 y3 ω4 = 9∙8 x3 y3 ω4 = 72x3 y3 ω4

ΜΚΔ = 3∙2x2y ω2 = 6 x2y ω2

**β)**

Είναι 15αxy3= 3∙5 αxy3, 10α x2 ω2 =2∙5 α x2 ω2 , 5yω2

Άρα ΕΚΠ = 3∙2∙5 α x2 ω2 y3 = 30 α x2 ω2 y3

ΜΚΔ = 5

**γ)**

Είναι 2x2( x + y)2 , 3xy3( x + y)2, 23x2y(xy)( x + y)

Άρα ΕΚΠ = 3∙23x2y3(xy)( x + y)2 = 24 x2y3(xy)( x + y)2

ΜΚΔ = x( x + y)

**2.**

Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των παραστάσεων

**α)** 6(x2y2) 4(xy)2 12(x y)3

**β)** α23α + 2 α24 α34α

**γ)** α3α2 (α2α)( α21) α3 – 2α2 + α

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Είναι 6(x2y2) = 2∙3(x + y)(xy)

4(xy)2 = 22(xy)2

12(x y)3 = 3∙22(xy)3

Άρα ΕΚΠ = 3∙22 (x + y) (xy)3 = 12 (x +y) (xy)3

ΜΚΔ = 2(xy)

**β)**

Είναι α23α + 2 = (α1)(α2)

α24 = (α2)(α + 2)

α34α = α(α2)(α + 2)

Άρα ΕΚΠ = α(α2)(α + 2) (α1)

ΜΚΔ = α2

**γ)**

Είναι α3α2 = α2(α1) ,

(α2α)( α21) = α(α1)(α1)(α + 1) = α(α1)2(α + 1)

α3 – 2α2 + α = α(α22α + 1) = α (α1)2

Άρα ΕΚΠ = α2(α +1) (α1)2

ΜΚΔ = α(α1)

**1.9 ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 73 – 74**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να συμπληρώστε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη Β για τις οποίες ορίζεται.

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α. | 1. x ≠ 1 |
| β. | 2. x ≠ 0 και x ≠ 1 |
| γ. | 3. x ≠ 1 |
| δ. | 4. x ≠ 1 και x ≠1 |
| ε. | 5. οποιοσδήποτε  αριθμός |
|  | 6. x ≠ 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| α | β | γ | δ | ε |
| 6 | 3 | 4 | 1 | 5 |

**Προτεινόμενη λύση**

α) Πρέπει x ≠ 0 άρα α → 6

β) Πρέπει x + 1 ≠ 0 δηλαδή x ≠ 1 άρα β → 3

γ) Πρέπει x21 ≠ 0 άρα (x + 1)( x1) ≠ 0 ή

x + 1 ≠ 0 και x1 ≠ 0

x ≠1 και x ≠ 1 άρα γ → 4

δ) Πρέπει x1≠ 0 δηλαδή x ≠ 1 άρα δ → 1

ε) Πρέπει x2 + 1≠ 0 πράγμα που ισχύει πάντα άρα ε → 5

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α)  = x + 1 Λ β)  = x + 1 Σ

γ)  =  Σ δ)  Λ

ε)  = x + y Σ στ) = x + y Λ

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**3.**

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

**α)** =  **β)**  = 1 **γ)**  = x

**δ)**  = x + 1 **ε)**  =  **στ)** = 

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**4.**

Ένας μαθητής για να βρει τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  έγραψε  =  και απάντησε ότι η παράσταση ορίζεται όταν x ≠ 4. Είναι σωστή η απάντηση του ;

**Προτεινόμενη λύση**

Οχι διότι, για να ορίζεται η παράσταση πρέπει x(x4) ≠ 0 άρα

x ≠ 0 και x4 ≠ 0

x ≠ 0 και x ≠ 4

**Ασκήσεις**

**1.**

Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Πρέπει x4 ≠ 0 δηλαδή x ≠ 4

**β)** Πρέπει 2y5 ≠ 0 δηλαδή y ≠ 

**γ)** Πρέπει (ω + 1)2 ≠ 0 άρα ω + 1 ≠ 0 άρα ω ≠1

**δ)** Πρέπει x(x3) ≠ 0 άρα x ≠ 0 και x3 ≠ 0

x ≠ 0 και x ≠ 3

**2.**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**ε)**  **στ)**  **ζ)**  **η)** 

**Προτεινόμενη λύση**

Με την προϋπόθεση ότι οι παραστάσεις ορίζονται έχουμε

**α)**  =  **β)**  =  **γ)** = **δ)**  =

**ε)**  = 1 **στ)**  =  =1 **ζ)** ==

**η)** = =  = 1

**3.**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**ε)**  **στ)**  **ζ)**  **η)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ==  με x ≠ 0 και x ≠2

**β)** == με y ≠ 0 και y ≠3

**γ)**  = =  με ω ≠ 0 και ω ≠x

**δ)**  = = =  με α ≠ 2

**ε)**  =  = με x ≠ 0 και x ≠ 4

**στ)**  =  =  με y ≠1

**ζ)**  == με x ≠  και x ≠ 

**η)** =  =  με α ≠ β

**4.**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)**  **γ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  =  = με x ≠2

**β)** =  = με y ≠ 2 και y ≠ 4

**γ)**  = =

= =  με ω ≠ 0 και ω ≠1 και ω ≠1

**5.**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)** 

**γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  =  =  με x ≠ 1 και x ≠3

**β)**  = =

=  =

= =

=  με y ≠  και y ≠ 

**γ)**  =  =

= =

= =

=  με ω ≠ 1 και ω ≠1

**δ)**  =  =

= =

= =

=  με α ≠ 0 και α ≠1

**6.**

Ένας λαμπαδηδρόμος κατά τα τελευταία μέτρα της διαδρομής του διήνυσε την απόσταση ΑΒ με σταθερή ταχύτητα 5m/sec. Φτάνοντας στο σημείο Β, ένας

άλλος λαμπαδηδρόμος ξεκινώντας από το σημείο Β διήνυσε την απόσταση ΒΓ

με σταθερή επιτάχυνση 4 m/sec2. Αν ο χρόνος που κινήθηκε κάθε αθλητής ήταν

t sec, να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα με την οποία διανύθηκε η απόσταση

ΑΓ ήταν t +  m/sec

**Προτεινόμενη λύση**

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι η απόσταση ΑΒ είναι ΑΒ = 5t

και η ΒΓ = ∙4∙t2 = 2t2 .

Η μέση ταχύτητα είναι υ μεσ =  =  = +  = t +  m/sec

**1.10 Α. ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ – ΔΙΑΙΡΕΣΗ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδας 77**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)**  =  (Λ) **β)**  = (Σ)

**γ)**  =  (Λ) **δ)**  = (Σ)

**ε)** ⋅ =  (Σ) **στ)** =  (Λ)

**ζ)**  = 0 (Λ) **η)**  :  = 1 (Σ)

**Προτεινόμενη λύση**

Φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

α) 3x⋅ =  β) ⋅  = γ) :  = 

δ) ⋅  = 1 ε) :  = 1 στ) : = 

**Ασκήσεις**

**1.**

Να υπολογίσετε τα γινόμενα

**α)** ⋅  **β)** ⋅ **γ)** 12x2⋅

**δ)**  **ε)** (5ω2)  **στ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ⋅  =  = **β)** ⋅== 

**γ)** 12x2⋅ =  = **δ)**  = =

**ε)** (5ω2) == **στ)** ==

**2.**

Να κάνετε τις διαιρέσεις

**α)** 8x :  **β)** :  **γ)**  : 3α2 **δ)**  : 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

8x :  = 8x =  = 

**β)**

: =  =  = 

**γ)**

 : 3α2 =  =  = 

**δ)**

 :  =  =  = 2xω

**3.**

Να υπολογίσετε τα γινόμενα

**α)** ⋅  **β)** ⋅ 

**γ)**  **δ)**  

**ε)**   **στ)**  

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

⋅  =  = 

**β)**

⋅ =  =  = 1

**γ)**

=  ==

**δ)**

 = ==

**ε)**

 = ==

**στ)**

  = =

= =

=

**4.**

Να κάνετε τις διαιρέσεις

**α)**  **β)**  **γ)** (ω + 2)

**δ)**  **ε)**  **στ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

=∙  = = 3

**β)**

 =  =  =  = 1

**γ)**

(ω + 2) == = 

**δ)**

=  =  = 

**ε)**

 = == = 

**στ)**

 = =

= =

=  = 1

**5.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)** : **β)** :

**γ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

: = =

==

=  = 

**β)**

: = : =

= ∙ =

= =

== 

**γ)**

 =  =

=  =

=  = 

**1.10 Β. ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ**

**ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 80-81**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1 .**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)**  + = 1 (Σ) **β)**  +  =  (Λ)

**γ)**   = 1 (Σ) **δ)**  +  = 0 (Σ)

**ε)** 1 +  = (Λ) **στ)**   = (Λ)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**  + =  = 1 άρα (Σ)

**β)** Προφανώς (Λ)

**γ)**   == = 1 άρα (Σ)

**δ)**  + = = 0 άρα (Σ)

**ε)** Προφανώς (Λ)

**στ)**   =  =  άρα (Λ)

**2.**

Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε κάποιο σημείο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό ;

α)  + = =  = 1

β)  =  =  = 1

**Προτεινόμενη λύση**

Που έχει γίνει το λάθος φαίνεται παρακάτω

 == = 

**3.**

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

**α)** = 0 **β)** + =1 **γ)**  +  = 

**δ)** =  **ε)**  +  = 2 **στ)** = 3

**Ασκήσεις**

**1.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  +  **β)**   **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 +  = + = 

**β)**

  = =  = = 

**γ)**

== 

**δ)**

= == 

**2.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**    **β)**   **γ)** 

**δ)**  +  **ε)** +  **στ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

   =  =  =  = 1

**β)**

  =  =

=  = =

= =  = 

**γ)**

=  =  = 

**δ)**

 +  = + =

=+=

= =  = 

**ε)**

 +  = +  =

= =

=  =

=  = 

**στ)**

 =  =

= =

=  =

=  =  = = 

**3.**

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

**α)**  **β)**  **γ)**  **δ)** 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

=  =  =  =  = x1

**β)**

 =  =  = 

=  = 

**γ)**

= =  =  =

= = 

**δ)**

=  =  =  =  = 

**4.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  +  **β)**   + 

**γ)**  +  **δ)**  +  

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 +  =  +  =

= +   =

= =

= =

=  =  =  με x ≠ 0 και x ≠ 2

**β)**

  + =   + =

= + =

= =

=  =

=  =

= =  με x ≠ 2y και x ≠2y

**γ)**

 +  =  + =

=  + =

= 

=  = 

==  με y ≠ 2 και y ≠ 3

**δ)**

 +  =  +  =

= +  =

=  =

= =

=  =

=  =

= 

=  = x + y με x ≠ y και x ≠y

**5.**

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

**α)**  **β)** :

**γ)**  **δ)** :

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 =

=   =

= ∙  =

= ∙ =

= ∙ =  με x ≠  και x ≠ και x ≠ 

**β)**

: = ∙ =

= ∙ =

= ∙ =

= ∙ =

= ∙ =

=  =

=  με x ≠ 1 και x ≠ 1 και x ≠ και x ≠

**γ)**

 = =

= ∙=

=  = με β ≠ 0 και α ≠ β

**δ)**

: = :  =

= ∙  =

=  =

=  με α ≠0 και β ≠ 0 και α ≠β

**6.**

**α)** Να αποδείξετε ότι  + xy = ( x + y)2

**β)** Να υπολογίσετε την παράσταση  + 56⋅ 44

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 + xy =  + xy = x2 + xy + y2 + xy =

= x2 + 2 xy + y2  =

= (x + y)2

**β)**

Η ζητούμενη παράσταση προκύπτει από το πρώτο μέλος του (α) για x = 56

και y = 44.

Επομένως  + 56⋅ 44 = ( 56 + 44) 2 = 1002 = 10000

**7.**

**α)** Αν Α =  και Β =  , να αποδείξετε ότι Α2 + Β2 = 1

**β)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1 ,  ,  αποτελούν μήκη

πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Α2 + Β2 = + =  +=

=  =

=  = 

**β)**

Αν x = 100 τότε =  και = 

Επομένως , σύμφωνα με το (α), έχουμε + = 12

Άρα η τριάδα 1 ,  ,  αποτελεί τριάδα πλευρών ορθογωνίου

τριγώνου με υποτείνουσα το 1.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Σχ. βιβλίου σελίδων 81 – 82**

**1.**

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

Κ = α3 (1 + α + 4 +  αν είναι α =  και β = 3

**Προτεινόμενη λύση**

Κ =  = =

= (2)2 + 4  + 1 =

= 4 + 4  + 1 =

= 4  + 1 = 

**2.**

Για κάθε θετικό ακέραιο ν , να αποδείξετε ότι

**α)** (αβ + 3γ) 2ν + 1 + ( βα3γ)2ν+1 = 0

**β)** (xy  ω) 2ν   ( y + ωx)2ν = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Επειδή ν θετικός ακέραιος, ο εκθέτης 2ν + 1 είναι περιττός.

Οι βάσεις των δυνάμεων είναι αντίθετες, οπότε υψωμένες σε περιττή δύναμη δίνουν αντίθετες παραστάσεις, άρα το άθροισμά τους είναι 0.

**β)**

Επειδή ν θετικός ακέραιος, ο εκθέτης 2ν είναι άρτιος.

Οι βάσεις των δυνάμεων είναι αντίθετες, οπότε υψωμένες σε άρτια δύναμη δίνουν ίσες ες παραστάσεις, άρα η διαφορά τους είναι 0.

**3.**

Αν είναι  =  , να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

Α =  Β = 

**Προτεινόμενη λύση**

Αφού  = θα είναι y = 2x

Α =  =  =  = 4

Β =  =  =

=  =  = 3

**4.**

Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = 2x2 + 2x + 800

**α)** Να αποδείξετε ότι Ρ(1x) = Ρ(x)

**β)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή Ρ(100) και Ρ(99)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Ρ(1x) = 2(1x)2 + 2(1x) + 800 = 2( 12x + x2) + 22x + 800 =

= 2 + 4x  2x2 + 22x + 800 =

= 2x2 + 2x + 800 = P(x)

**β)**

Ρ(100) = 2 (100)2 + 2∙100 + 800 = 20000 + 200 + 800 = 19000

Ρ(99) = Ρ(1 – 100)  Ρ(100) = 19000

**5.**

**α)** Να αποδείξετε ότι α3 + β3 + γ3 3αβγ = (α + β + γ)( α2 + β2 + γ2 – αβαγβγ)

( Ταυτότητα Euler)

**β)** αν α + β + γ = 0 να αποδείξετε ότι α3 + β3 + γ3 = 3αβγ

**γ)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση (xy)3 + ( yω)3 + ( ωx)3

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

(α + β + γ)( α2 + β2 + γ2 – αβαγβγ) = α3 + αβ2 + αγ2 α2βα2γαβγ +

+ βα2 + β3 +βγ2αβ2αβγβ2γ +

+ γα2 +γβ2 + γ3 – αβγαγ2βγ2  =

= α3 + β3 + γ3 3αβγ

**β)**

Αν α + β + γ = 0, από το (α) θα είναι α3 + β3 + γ3 3αβγ = 0 άρα

α3 + β3 + γ3 = 3αβγ

**γ)**

Επειδή (xy) + ( yω) + ( ωx) = xy + yω + ωx = 0,

σύμφωνα με το (β) θα είναι (xy)3 + ( yω)3 + ( ωx)3 = 3(xy)( yω)( ωx)

**6.**

Αν α + β =  και αβ =  τότε να αποδείξετε ότι

**α)** α2 + β2 =  **β)** (3α + 1) 2 + ( 3β + 1)2 + 9( α + β) = 40

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Από γνωστή εφαρμογή (2) της σελίδας 45 είναι α2 + β2 = ( α + β)22αβ

Άρα α2 + β2 = 2 = +  = 

**β)**

(3α + 1)2 + ( 3β + 1)2 + 9( α + β) = 9α2 + 6α + 1 + 9β2 + 6β + 1 + 9α + 9β =

= 9(α2 + β2) + 15(α + β) + 2 =

 9∙ + 15+ 2 =

= 435 + 2 = 40

**7.**

Αν για τους αριθμούς x , y ισχύει μία από τις παρακάτω ισότητες, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x , y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

**α)** x42y2 = x2(y22) **β)** x3 + y3 = x2y + y2x

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x42y2 = x2(y22) άρα x42y2 = x2y22x2

x42y2  x2y2 + 2x2 = 0

x2(x2 + 2) y2(x2 + 2) = 0

(x2 + 2)(x2y2) = 0

(x2 + 2)(xy) (x + y) = 0

x2 + 2 = 0 ή xy = 0 ή x + y = 0

πράγμα αδύνατο ή x = y ή x = y

ίσοι ή αντίθετοι

**β)**

x3 + y3 = x2y + y2x άρα x3 + y3 x2y  y2x= 0

x2(xy) – y2(xy) = 0

(xy)(x2y2) = 0

(xy)( x –y) (x + y) = 0

(xy)2( x + y) = 0

xy = 0 ή x + y = 0

x = y ή x = y

ίσοι ή αντίθετοι

**8.**

**α)** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα x2 + 4x + 3 , x2 + 2x 3

**β)** Να υπολογίσετε την παράσταση Α =  + + 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + 4x + 3 = (x +1)(x + 3) , x2 + 2x 3 = (x + 3)(x1)

**β)**

Α =  + +  =

=  +  +  =

= + + =

=  =

= =  = 

**9.**

Δίνονται οι παραστάσεις Α = x(x + 3) και Β = ( x + 1)( x + 2)

**α)** Να αποδείξετε ότι Β = Α + 2 και ΑΒ + 1 = (Α + 1)2

**β)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση x( x + 1)(x + 2)( x +3) + 1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Β = (x + 1)( x + 2) = x2 + 2x + x + 2 = x2 + 3x + 2 =

= x(x + 3) + 2 =

= A + 2 **(1)**

ΑΒ + 1  A (A + 2) + 1 = A2 + 2A + 1 = (A + 1)2 **(2)**

**β)**

x( x + 1)(x + 2)( x +3) + 1 = ΑΒ + 1  (A + 1)2 =

= [x(x + 3) +1]2 =

= (x2 + 3x +1)2

**10.**

**α)** Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι 16πx4 + 8πx2 + π. Να βρείτε την ακτίνα του.

**β)** Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των

εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες 4x και 4x21

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο Ε = πρ2

Η υπόθεση γράφεται 16πx4 + 8πx2 + π = π(16x4 + 8x2 + 1) = π(4x2 + 1)2

Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = 4x2 + 1

**β)**

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων είναι ίσο με

π(4x)2 + π(4x21)2 = 16πx2 + 16πx4 8πx2 + π = 16πx4 + 8πx2 + π

Και με βάση το (α) η ζητούμενη ακτίνα είναι ρ = 4x2 + 1

**11.**

**α)** Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να δείξτε ότι ο αριθμός κ2 + κ είναι άρτιος.

**β)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων αν διαιρεθεί

με το 6 δίνει υπόλοιπο 1.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι

πολλαπλάσιο του 8.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

κ2 + κ = κ(κ +1) = γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων. Οπότε ο ένας από αυτούς είναι άρτιος, άρα ο κ2 + κ είναι άρτιος

**β)**

Έστω κ , κ + 1 δύο διαδοχικοί ακέραιοι.

Τότε (κ +1)3 κ3 = (κ +1κ)[κ2 + κ(κ + 1) + (κ + 1)2] =

= 3κ2 + 3κ +1 =

= 3(κ2 + κ) +1  3∙2ν + 1 = 6ν + 1

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του (κ +1)3 κ3 με το 6 είναι 1 και το πηλίκο

ν (θέσαμε κ2 + κ = 2ν = άρτιος)

**γ)**

Έστω μ = 2ρ+1 και η = 2λ + 1 δύο περιττοί ακέραιοι

Τότε μ2 η2 = (2ρ + 1)2 (2λ+1)2 = 4ρ2 + 4ρ + 1 4λ24λ1 =

= 4(ρ2 + ρ)  4(λ2+λ) 

= 4∙2σ 4∙2π = 8(σπ) = πολλαπλάσιο του 8

**12.**

**α)** Να κάνετε τη διαίρεση (x61) : ( x1) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός 761 είναι πολλαπλάσιο

του 6.

**β)** Να κάνετε την διαίρεση (x5 + 1) : ( x + 1) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός 215 + 1 είναι

πολλαπλάσιο του 9

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

|  |  |
| --- | --- |
| x6 1  x6 + x5 | x1 |
| x5 1  x5 + x4 | x5 + x4 + x3 + x2 + x + 1 |
| x4 1  x4+ x3 |  |
| x3 1  x3 + x2 |
| x2 1  x2 + x |
| x 1  x + 1 |
| 0 |

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει x61 = (x1)( x5 + x4 + x3 + x2 + x + 1)

Για x = 7, έχουμε 761 = (71)( 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1)

761 = 6 ( 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1)

Και αν θέσουμε 75 + 74 + 73 + 72 + 7 + 1 = κ ακέραιο, έχουμε

761 = 6κ = πολλαπλάσιο του 6

**β)**

|  |  |
| --- | --- |
| x5 +1  x5  x4 | x + 1 |
| x4 +1  x4 + x3 | x4  x3 + x2 x + 1 |
| x3 +1  x3 x2 |  |
| x2 +1  x2 + x |
| x +1  x  1 |
| 0 |

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει x5 + 1 = (x + 1)( x4  x3 + x2 x + 1)

Για x = 23 έχουμε 215 + 1 = (23 + 1)( 212  29 + 26 23 + 1) =

= 9(212  29 + 26 23 + 1) =

= 9μ όπου μ = 21229 + 26 23 + 1 ακέραιος

Τελικά έχουμε ότι 215 + 1 = 9μ = πολλαπλάσιο του 9

**13.**

**α)** Να αποδείξετε ότι  = 

**β)** Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές

2 , 3, 4 ,…2008 και να αποδείξετε ότι

 +  + + …+  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 = =  =  =  **(1)**

**β)**

Για x = 2 η (1) δίνει  = 

x = 3  = 

x = 4  = 

……………………………………..

…………………………………….

x = 2008  = 

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και παρατηρώντας ότι ο δεύτερος προσθετέος του 2ου μέλους κάθε σειράς διαγράφεται με τον πρώτο προσθετέο του 2ου μέλους της επόμενης σειράς, βρίσκουμε ότι