**1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1**.

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες , μια άσπρη , μια μαύρη και μια κόκκινη . Κάνουμε το εξής πείραμα : παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα , καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της ( όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση ) .

**i)** Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος ;

**ii)** Ποιο είναι το ενδεχόμενο “ η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη”

**iii)** Ποιο είναι το ενδεχόμενο “ να εξαχθεί και τις δύο φορές μπάλα με το ίδιο

##### χρώμα”;

**i)**

**Λύση**

Δεντροδιάγραμμα



Δυνατά

αποτελέσματα

Όπου Α είναι το ενδεχόμενο “η μπάλα είναι άσπρη” Μ είναι το ενδεχόμενο

“η μπάλα είναι μαύρη” και Κ είναι το ενδεχόμενο “η μπάλα είναι κόκκινη”

Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο

Ω = { ΑΑ , ΑΜ , ΑΚ , ΜΑ , ΜΜ , ΜΚ , ΚΑ , ΚΜ , ΚΚ }

**ii)**

Το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη” είναι το { ΚΑ , ΚΜ , ΚΚ}

**iii)**

Το ενδεχόμενο “μπάλα του ιδίου χρώματος και στις δύο εξαγωγές” είναι το

{ ΑΑ , ΜΜ , ΚΚ}

**2.**

Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα , χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης

(όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση)

### Λύση

### i)

Δεντροδιάγραμμα



##### Οπότε ο δειγματικός χώρος Ω είναι Ω = {ΑΜ , ΑΚ , ΜΑ , ΜΚ , ΚΑ , ΚΜ}

**ii)**

Το ενδεχόμενο “ η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη” είναι {ΚΜ , ΚΑ}

**iii)**

Το ενδεχόμενο “ μπάλα με το ίδιο χρώμα και στις δύο εξαγωγές” είναι το 

**3.**

Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο (Κ) ή στη Μακεδονία (Μ) . Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο (Α) ή με πλοίο (Π). Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της (Αυτ) , με τρένο (Τ) ή με αεροπλάνο (Α). Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε :

**i)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

**ii)** Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: “η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο” στον τόπο

των διακοπών της”

### Λύση



**i)** Ω = {ΚΑ , ΚΠ , ΜΑυτ , ΜΤ , ΜΑ}

**ii)** Α = {ΚΑ , ΜΑ}.

**4.**

Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα . Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα

|  |  |
| --- | --- |
| Γεύμα | Επιλογές |
| Κύριο πιάτο | Κοτόπουλο ή φιλέτο |
| Συνοδευτικό | Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα |
| Γλυκό | Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ |

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο

**i)** Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

**ii)** Να βρείτε το ενδεχόμενο Α : “το άτομο επιλέγει παγωτό”

**iii)** Να βρείτε το ενδεχόμενο Β : “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”

**iv)** Να βρείτε το ενδεχόμενο Β

**v)** Αν Γ είναι το ενδεχόμενο : “το άτομο επιλέγει ρύζι ” , να βρείτε το ενδεχόμενο



### Λύση

Φτιάχνουμε δεντροδιάγραμμα του πειράματος



Με τη βοήθεια του παραπάνω δενδροδιαγράμματος έχουμε ότι

**i)**

Ω = { ΚΜΠ , ΚΜΤ , ΚΜΖ , ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΚΧΠ , ΚΧΤ , ΚΧΖ ,

ΦΜΠ , ΦΜΤ , ΦΜΖ , ΦΡΠ , ΦΡΤ , ΦΡΖ , ΦΧΠ , ΦΧΤ , ΦΧΖ }

**ii)**

Το ζητούμενο ενδεχόμενο θα έχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα που

περιέχουν το Π (παγωτό), άρα Α = { ΚΜΠ , ΚΡΠ , ΚΧΠ ,ΦΜΠ , ΦΡΠ , ΦΧΠ }

**iii)**

Ομοίως το ενδεχόμενο Β θα περιέχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα που περιέχουν το Κ ( κοτόπουλο), άρα

Β = {ΚΜΠ , ΚΜΤ , ΚΜΖ , ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΚΧΠ , ΚΧΤ, ΚΧΖ }

**iv)**

 = {ΚΜΠ , ΚΡΠ , ΚΧΠ }

**v)**

Γ = {ΚΡΠ , ΚΡΤ , ΚΡΖ , ΦΡΠ , ΦΡΤ , ΦΡΖ} ,

οπότε = {ΚΡΠ}

**5.**

Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή , μέτρια , σοβαρή και κρίσιμη . Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο και με Ι τον ασφαλισμένο , και στην συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α , β , γ , δ , ανάλογα αν η κατάστασή του είναι καλή , μέτρια , σοβαρή ή κρίσιμη . Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς . Να βρείτε :

**i)** Το δειγματικό χώρο του πειράματος

**ii)** Το ενδεχόμενο Α : “ η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και

είναι ανασφάλιστος”

**iii)**  Το ενδεχόμενο Β : “ η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”

**iv)** Το ενδεχόμενο Γ: “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”

### Λύση



**i)** Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι

Ω = { 0α , 0β , 0γ , 0δ , Ια , Ιβ , Ιγ , Ιδ}

**ii)**

Α = { 0γ , 0δ}

**iii)**

Β = {0α , 0β , Ια , Ιβ }

**iv)**

Γ = {Ια , Ιβ , Ιγ , Ιδ}

**6.**

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα :

**i)** Ρίχνουμε ένα ζάρι . Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το

ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό .

**ii)** Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και

Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός

**iii)** Επιλέγουμε μια γυναίκα . Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και

Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια

**iv)** Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο . Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό

του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό .

**Λύση**

**i)**

Τα ενδεχόμενα **είναι** ασυμβίβαστα διότι Α = {3} και Β = {2 , 4 , 6}, οπότε



**ii)**

Τα ενδεχόμενα **δεν είναι** ασυμβίβαστα , διότι όπως όλοι ξέρουμε υπάρχουν Έλληνες

καθολικοί οπότε 

**iii)**

Τα ενδεχόμενα **δεν** **είναι** ασυμβίβαστα διότι υπάρχουν γυναίκες με ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών που είναι παντρεμένες περισσότερο από 30 χρόνια οπότε

Ø

**iv)**

Τα ενδεχόμενα **είναι** ασυμβίβαστα αφού , ένα αυτοκίνητο που είναι ευρωπαϊκό δεν μπορεί να είναι και ασιατικό δηλαδή = 

**7.**

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους . Να

γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος .

### Λύση

Α = αγόρι και Κ = κορίτσι



Ω = { ΑΑΑ , ΑΑΚ , ΑΚΑ , ΑΚΚ , ΚΑΑ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ }

**Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**

###### 1.

###### Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι αυτός που θα κερδίσει πρώτος δύο παιχνίδια . Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι , να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

**Λύση**

Ω = {αα , αβα , αββ , ββ , βαα , βαβ }

**2.**

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές . Να βρείτε τα ενδεχόμενα :

Α : “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ”

Β : “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός ”

Γ : “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5 ”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα .



### Λύση

Στο πείραμα αυτό για να βρούμε τον δειγματικό χώρο μας συμφέρει να φτιάξουμε πίνακα διπλής εισόδου

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2η ρίψη  1η ρίψη | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Ο δειγματικός χώρος περιέχει σαν στοιχεία όλα τα αποτελέσματα του παραπάνω

πίνακα διπλής εισόδου

Α = { (2,1) , (3,1) , (3,2) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (5,1) , (5,2) , (5, 3) , (5,4) , (6,1) ,

(6,2), (6,3) , (6,4) , (6,5)}

Β = {(1,1), (1,3) , (1,5) , (2,2) , (2,4) , (2,6) , (3,1) , (3,3) , (3 ,5) , (4,2), (4,4) ,

(4 , 6), ( 5 ,1) ,( 5, 3) , ( 5,5) , (6,2) , (6 ,4) , (6,6)}

Γ= {(1,1) , (1 ,2) , ( 1, 3) , ( 1,4) , ( 2,1) , ( 2 , 2) , (3 , 1) , (4, 1)}

 = {(3 ,1) , ( 4, 2) , ( 5 , 1) , ( 5 , 3) , ( 6 , 2) , ( 6 , 4)}

{ ( 2 , 1) , (3 , 1) , ( 4 ,1)}

={ ( 1 , 1) , ( 1, 3) , ( 2 , 2) , ( 3 , 1) }

Γ={ ( 3,1) }

**1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Από μία τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

**i)** Το φύλλο είναι 5

**ii)** Το φύλλο δεν είναι 5

### Λύση

### i)

Δεχόμαστε ότι πρόκειται για ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα

Έστω Α το ενδεχόμενο : το φύλλο είναι πέντε .

Επειδή στην τράπουλα των 52 υπάρχουν 4 πεντάρια, οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου Α , είναι Ν(Α) = 4 , ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι Ν (Ω) = 52 .

Άρα 

**i)**

Το ενδεχόμενο : το φύλλο δεν είναι πέντε , είναι το Α΄ αντίθετο του Α.

Οπότε Ρ(Α΄ ) = 1 – Ρ(Α) = 

**2.**

Να βρείτε την πιθανότητα στην ρίψη δύο νομισμάτων (διαδοχικά) να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.

### Λύση

Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος φτιάχνουμε δεντροδιάγραμμα

2ο νόμισμα Κ

1ο νόμισμα

Κ Γ

Αρχή Κ

Γ

Γ

όπου Κ = κεφάλι και Γ = γράμματα

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι Ω = {ΚΚ , ΚΓ, ΓΚ , ΓΓ}, άρα Ν(Ω) = 4 .

Αν Α είναι το ενδεχόμενο : δύο “γράμματα”, τότε Α = {ΓΓ}, άρα Ν(Α) = 1. Οπότε 

**3.**

Ένα κουτί περιέχει μπάλες : 10 άσπρες (Α), 15 μαύρες (Μ) , 5 κόκκινες (Κ) και 10 πράσινες (Π). Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι :

**i)** μαύρη **ii)** μαύρη ή άσπρη **iii)** ούτε κόκκινη ούτε πράσινη

### Λύση

Αφού μέσα στο κουτί υπάρχουν 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες , θα είναι Ν(Ω) = 40

**i)**

Έστω Μ το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη . Τότε Ν(Μ) = 15

Άρα 

**ii)**

Έστω Α είναι το ενδεχόμενο : η μπάλα είναι άσπρη . Τότε Ν(Α) = 10

Άρα 

Το ενδεχόμενο : η μπάλα να είναι μαύρη ή άσπρη, είναι το  με Α , Μ ασυμβίβαστα.

Οπότε 

**iii)**

Το ενδεχόμενο : η μπάλα δεν είναι ούτε πράσινη ούτε κόκκινη , σημαίνει ότι η μπάλα είναι : μαύρη ή άσπρη , που όπως είδαμε έχει πιθανότητα  .

**4.**

Σε μία τάξη με 30 μαθητές , ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν.

Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον πίνακα

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Αριθμός μαθητών | 4 | 11 | 9 | 3 | 2 | 1 |
| Αριθμός αδελφών | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή , να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να

έχει τρία παιδιά .

**Λύση**

Το πλήθος όλων των μαθητών της τάξης είναι 30 , οπότε Ν(Ω)=30 .

Για να έχει η οικογένεια του μαθητή 3 παιδιά θα πρέπει ο μαθητής που επιλέχτηκε να

έχει 2 αδέλφια .

Έστω Α το ενδεχόμενο : ο μαθητής έχει δύο αδέλφια.

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι Ν(Α) = 9

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι Ρ(Α) =

**5.**

Έστω τα σύνολα Ω = {ω / 10  ω  20} , Α = {ωΩ / ω πολλαπλάσιο του 3} και Β = {ωΩ / ω πολλαπλάσιο του 4}. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες

**i)** Να ανήκει στο Α

**ii)** Να μην ανήκει στο Β

### Λύση

Από την υπόθεση βλέπουμε ότι το Ω περιέχει σαν στοιχεία τους φυσικούς που ικανοποιούν την σχέση 10  ω  20 . Άρα

Ω = { 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 } με Ν(Ω) = 11

Το ενδεχόμενο Α περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω τα οποία είναι πολλαπλάσια του 3.

Άρα Α={ 12 , 15 , 18 } με Ν(Α) = 3

Το Β περιέχει τα στοιχεία του Ω που είναι πολλαπλάσια του 4.

Άρα Β = {12 , 16 , 20 } με Ν(Β) = 3

Οπότε **i)** 

**ii)** Δεν ανήκει στο Β σημαίνει ανήκει στο Β΄ .

Γνωρίζουμε ότι Ρ(Β΄) = 1 – Ρ(Β).

Αλλά Ρ(Β) = 

Άρα Ρ(Β΄) = 1 – 

**6.**

Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30% , η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40% . Να βρείτε την πιθανότητα

**i)** Να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος

**ii)** Να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος

### Λύση

Έστω : Λ το ενδεχόμενο κερδίζει ο Λευτέρης, Π κερδίζει ο Παύλος και Ν κερδίζει ο Νίκος

Τότε Ρ(Λ) = , Ρ(Π) = και Ρ(Ν) =

**i)**

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το  με Λ και Π ασυμβίβαστα .

## Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι



**ii)**

Δεν κερδίζει ο Λευτέρης ή ο Νίκος είναι το ενδεχόμενο  οπότε



( πάλι τα Λ και Ν είναι ασυμβίβαστα )

**7.**

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν 



Λύση

  





**8.**

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω έχουμε

. Να βρείτε την Ρ(Β)

Λύση

  





**9.**

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι

Ρ(Α) = Ρ(Β), . Να βρείτε την Ρ(Α) .

##### **Λύση**

  0,6 = P(A) + P(A) – 0,2

0,8 = 2P(A)

P(A) = 0,4

**10.**

Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι

 . Να βρείτε την Ρ(ΑΒ) .

**Λύση**

Ρ(Β΄) =  1 – Ρ(Β) =   Ρ(Β) = 1–  = 

Ρ(  

= 

= 

**11**.

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι



### Λύση

 και P(AB)  0 



(Προσθέτουμε στο 2ο μέλος την P(AB), άρα αυτό μεγαλώνει)

**12.**

Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των

πελατών έχει κάρτα D , το 55% έχει κάρτα V και το 15% έχει και τις δύο

κάρτες . Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να

έχει μία τουλάχιστον από τις δύο κάρτες ;

### Λύση

### Έστω D το ενδεχόμενο, ο πελάτης να έχει κάρτα D. Τότε Ρ(D) =,

V το ενδεχόμενο , ο πελάτης να έχει κάρτα V. Τότε Ρ(V) = .

Το ενδεχόμενο , ο πελάτης έχει και τις δύο κάρτες είναι το (DV) .

Οπότε  .

Το ενδεχόμενο, ο πελάτης έχει μία τουλάχιστον κάρτα , είναι το (DV) .

Οπότε από τον προσθετικό νόμο έχουμε



P(DV ) = 

**13**.

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση , το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο . Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

**α)** τουλάχιστον μία ασθένεια

**β)** μόνο μία ασθένεια

### Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα : Υ = το άτομο έχει υπέρταση , οπότε Ρ(Υ) =

Σ = το άτομο έχει στεφανιαία , οπότε Ρ(Σ) =

Tο ενδεχόμενο : το άτομο έχει και τις δύο ασθένειες , είναι το  ,

οπότε 

**α)**

Το ενδεχόμενο : το άτομο έχει μία τουλάχιστον ασθένεια είναι το  .

Οπότε 

= 

**β)**

Το ενδεχόμενο : το άτομο έχει μία μόνο ασθένεια είναι το (Υ – Σ)(Σ – Υ)

και επειδή τα Υ – Σ , Σ – Υ είναι ασυμβίβαστα , με τον απλό προσθετικό

νόμο θα έχουμε P **(1)**

Αλλά P(Υ – Σ) = Ρ(Υ) – Ρ(ΥΣ) =  –  = 

και Ρ(Σ – Υ) = Ρ(Σ) – Ρ(ΥΣ) =  –  = 

(1)  P =  +  = 

**14**.

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 30% Γαλλικά

και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε

την πιθανότητα, να μη μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες

**Λύση**

Έστω τα ενδεχόμενα Α : μαθαίνει αγγλικά , με Ρ(Α) =

Γ : μαθαίνει γαλλικά , με Ρ(Γ) =

Το ενδεχόμενο, μαθαίνει και τις δύο γλώσσες είναι το  με 

Το ενδεχόμενο δεν μαθαίνει καμία γλώσσα είναι το



= 1 – []

= 

= 

**B΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1**.

Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε Ρ(Α) = κ,

Ρ(Β) = λ και = μ , να βρείτε τις πιθανότητες

**i)** να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α και Β

**ii)** να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

**iii)** να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β

**Λύση**

**i)**

Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β είναι το ενδεχόμενο 

οπότε από τον προσθετικό νόμο έχουμε ότι

= κ + λ – μ

**ii)**

Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται είναι το ενδεχόμενο 

οπότε έχουμε 

= 1 – (κ + λ – μ)

= 1 – κ – λ + μ

**iii)**

Ένα μόνο από τα Α και Β πραγματοποιείται, είναι το ενδεχόμενο 

και επειδή , τα ενδεχόμενα Α – Β , Β – Α είναι ασυμβίβαστα , θα έχουμε



= 

= κ – μ + λ – μ

= κ + λ – 2μ

**2**.

Σε μία κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση , το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαία ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.

##### **Λύση**

##### Έστω Τ = το ενδεχόμενο το νοικοκυριό δεν έχει τηλεόραση με Ρ(Τ) =

Β = το ενδεχόμενο το νοικοκυριό δεν έχει βίντεο με Ρ(Β) =

Τότε , το νοικοκυριό δεν έχει ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο είναι το (

με 

Ζητάμε την πιθανότητα , επιλέγοντας ένα νοικοκυριό στην τύχη , να έχει

τηλεόραση και βίντεο. Δηλαδή ζητάμε την Ρ(Τ΄Β΄ ).

Από διάγραμμα Venn, διαπιστώνουμε ότι (ΑΒ)΄ = (Α΄Β΄ )

Οπότε Ρ(Τ΄Β΄ ) = Ρ(ΤΒ)΄

= 1 – Ρ(ΤΒ)

= 1 – [Ρ(Τ) + Ρ(Β) - Ρ(ΤΒ)]

= 1 – Ρ(Τ) – Ρ(Β) + Ρ(ΤΒ)

= 1 – 

**3**.

Αν  , να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) και Ρ(Α΄).

##### **Λύση**

  



4Ρ(Α) = 3 – 3Ρ(Α)

7Ρ(Α)=3





**4**.

Αν 0 < Ρ(Α) < 1 να αποδείξετε ότι 

#### Λύση

Έστω Ρ(Α) = ρ με 0 < ρ < 1, οπότε Ρ(Α΄ ) = 1 – ρ > 0.

Αρκεί να αποδείξουμε  +   4

1 – ρ + ρ  4ρ(1 – ρ)

1  4ρ – 4

4– 4ρ + 1  0

(2ρ – 1 0 που ισχύει

**5**.

Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με Ρ(Α) = 0,6 και Ρ(Β) = 0,7 , να δείξετε ότι 0,3  Ρ(Α  0,6

**Λύση**

 Για την ανισότητα Ρ(Α  0,6

  Ρ(Α  Ρ(Α)  Ρ(Α  0,6

 Για την ανισότητα 0,3  Ρ(Α

Ρ(Α =   Ρ(Α = 0,6 + 0,7 – 

Ρ(Α = 1,3 –  **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε 0,3  Ρ(Α 

0,3  1,3 – 

–1  – 

  0 που ισχύει

**6**.

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β του ιδίου δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι



#### Λύση

  

Ρ(Β) –1 + Ρ(Α)  Ρ(Α) + Ρ(Β) –

–1  –

  1 που ισχύει

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**1.**

Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι :

“δύο κεφαλές” , “ μία κεφαλή και μία γράμματα” , “δύο γράμματα”

και επομένως καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα . Τι είναι λάθος

στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

#### Απάντηση

Το λάθος είναι ότι υπάρχει και το αποτέλεσμα “ μία γράμματα και μία κεφαλή”

και επομένως η σωστή πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο είναι 

**2.**

Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή “ είναι . Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα

αυτό.

#### Απάντηση

## Είναι συμπτωματικό, πρόκειται για μικρό αριθμό ρίψεων

**3.**

Τρία συνηθισμένα ζάρια , ένα άσπρο , ένα μαύρο και ένα κόκκινο τοποθετούνται σε ένα κουτί . Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί , στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της πάνω έδρας του .

**(α)** Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;

**(β)** Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου είναι

3∙6 , 36 , 6! , 63 , 3∙63

#### Απάντηση

**(α)** Ίδια πιθανότητα επιλογής ζαριού

**(β)** Σωστή απάντηση είναι η 3∙6

**4.**

Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4 , ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;

0,2 0,8 0,6 1,4

**5.**

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι τέτοια ώστε

Ρ(Α) =, ποια είναι η πιθανότητα Ρ(

1 ,  ,  , τίποτα από τα προηγούμενα .

**6.**

Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό

διάγραμμα του Venn το σκιασμένο εμβαδόν

Β , Β΄ , Α – Β , Β – Α

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7 – 9 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ)

**7.**

Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

**8.**

Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

**9.**

Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους,

τότε και τα συμπληρωματικά τους Α΄ και Β΄ είναι

ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

**10.**

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει

Ρ(Α) + Ρ(Β) = 1,3 ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Παρατήρηση :

Η ερώτηση είναι ασαφής διότι δεν αναφέρεται αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι του

ίδιου δειγματικού χώρου .

Αν είναι του ίδιου δειγματικού χώρου δεν μπορεί να ισχύει διότι τότε θα ήταν και

= Ρ(Α) + Ρ(Β) =1,3 πράγμα άτοπο, αφού η πιθανότητα οποιουδήποτε

ενδεχομένου είναι  1

Αν όμως δεν είναι του ίδιου δειγματικού χώρου, θα μπορούσε να ισχύει .

**11.**

Να γράψετε με την βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn.



 



(Β – Α)΄ []΄