**2.2 Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ**

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 92 – 93**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης x2 4x + 3 = 0 (Λ)

β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης x2 4x + 3 = 0 (Σ)

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης (x2)( x + 1) = 0 είναι x = 2 και x = 1 (Σ)

δ) Η εξίσωση x2 = 16 έχει μοναδική λύση τον αριθμό x = 4 (Λ)

ε) Η εξίσωση x2 =  9 δεν έχει λύση (Σ)

στ) Η εξίσωση (x2)2 = 0 έχει διπλή λύση τον αριθμό x = 2 (Σ)

**Προτεινόμενη λύση**

α) Για x = 0 η εξίσωση γίνεται 3 = 0 που είναι ψευδές άρα η πρόταση είναι (Λ)

β) Για x = 3 η εξίσωση γίνεται 912 + 3 = 0, δηλαδή 0 = 0 που είναι αληθές

Άρα η πρόταση είναι (Σ)

γ) Για x = 2 η εξίσωση γίνεται 0 = 0 αλλά και για x = 1 η εξίσωση γίνεται

0 = 0, άρα η πρόταση είναι (Σ)

δ) Η εξίσωση x2 = 16 έχει λύσεις τους αριθμούς 4 και 4, άρα η πρόταση

είναι (Λ)

ε) Προφανώς η πρόταση είναι (Σ)

στ) Η εξίσωση γράφεται (x2)(x2) = 0 απ’ όπου προκύπτει ότι

x2 = 0 ή x2 = 0, άρα x = 2 ή x = 2 , άρα το 2 είναι διπλή λύση,

οπότε η πρόταση είναι (Σ)

**2.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Η εξίσωση 5x6 = x2 είναι 2ου βαθμού (Σ)

β) Η εξίσωση x2 + 3x + 8 = x( x + 2) είναι 2ου βαθμού (Λ)

γ) Η εξίσωση (λ2) x2 + 5x + 3 = 0 είναι

i) 1ου βαθμού όταν λ = 2 (Σ)

ii) 2ου βαθμού όταν λ ≠ 2 (Σ)

**Προτεινόμενη λύση**

α) Η εξίσωση γράφεται x25x + 6 = 0 και το πολυώνυμο x25x + 6 είναι 2ου

βαθμού

β) H εξίσωση γράφεται x2 + 3x + 8 = x2 + 2x δηλαδή x + 8 = 0, η οποία είναι 1ου

βαθμού .

γ) (i) Όταν λ = 2, η εξίσωση γίνεται 5x + 3 = 0 η οποία είναι 1ου βαθμού

(ii) Όταν λ ≠ 2 είναι 2ου βαθμού .

**3.**

Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση x2 = 6x απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση την x = 6 . Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για x = 0 . Που έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση x = 0 ;

**Προτεινόμενη λύση**

Το λάθος οφείλεται στο γεγονός ότι για να γίνει απλοποίηση με το x θα πρέπει το x να είναι ≠ 0

**Ασκήσεις**

**1.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** (x4)(x + 1) = 0 **β)** y(y + 5) = 0 **γ)** (3ω)(2ω + 1) = 0

**δ)**7x( x7) = 0 **ε)** 3y = 0 **στ)**  (2ω1) = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (x4)(x + 1) = 0 άρα x4 = 0 ή x + 1 = 0

x = 4 ή x =  1

**β)** y(y + 5) = 0 άρα y = 0 ή y + 5 = 0

y = 0 ή y =  5

**γ)** (3ω)(2ω + 1) = 0 άρα 3ω = 0 ή 2ω + 1 = 0

ω = 3 ή ω = 

**δ)** 7x( x7) = 0 άρα x = 0 ή x  7 = 0

x = 0 ή x = 7

**ε)** 3y = 0 άρα y = 0 ή   2 = 0

y = 0 ή y = 6

**στ)**  (2ω1) = 0 άρα ω = 0 ή 2ω1 = 0

ω = ή ω = διπλή ρίζα το 

**2.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** x2 = 7x **β)** y2 = 9y **γ)** 2ω2 72 = 0

**δ)** 2t2 18 = 0 **ε)** 0,2 φ2 + 3,2 = 0 **στ)** 0,5z = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x2 = 7x άρα x2  7x = 0

x(x  7) = 0

x = 0 ή x  7 = 0

x = 0 ή x = 7

**β)** y2 = 9y άρα y2 + 9y = 0

y( y + 9) = 0

y = 0 ή y + 9 = 0

y = 0 ή y =9

**γ)** 2ω2 72 = 0 άρα 2 ( ω236) = 0

2(ω6)( ω + 6) = 0

ω6 = 0 ή ω + 6 = 0

ω = 6 ή ω = 6

**δ)** 2t2 18 = 0 άρα 2 ( t2 + 9) = 0

t2 + 9 = 0 πράγμα αδύνατον

**ε)** 0,2 φ2 + 3,2 = 0 άρα 2φ232 = 0

2 ( φ216) = 0

2(φ4)( φ + 4) = 0

φ4 = 0 ή φ + 6 = 0

φ = 4 ή φ = 4

**στ)** 0,5z = 0 άρα 6⋅6⋅0,5z = 0

z2 3z = 0

z(z3) = 0

z = 0 ή z  3 = 0

z = 0 ή z = 3

**3.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** (2x1)2 1 = 0 **β)** 3(x + 2)2 = 12 **γ)** ( x + 1)2 = 2x

**δ)**  = 27 **ε)** (3x1)2  4x2 = 0 **στ)** (x + )2 3 = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (2x1)2 1 = 0 άρα [(2x1) + 1][(2x1) 1] = 0

2x( 2x2) = 0

x = 0 ή 2x 2 = 0

x = 0 ή x = 1

**β)** 3( x + 2)2 = 12 άρα (x + 2)2 = 4

(x + 2)2  4 = 0

[(x + 2) + 2][(x + 2) 2] = 0

(x + 4)x = 0

x = 0 ή x + 4 = 0

x = 0 ή x = 4

**γ)** (x + 1)2 = 2x άρα (x + 1)2  2x = 0

x2 + 2x + 1  2x = 0

x2 + 1 = 0 η οποία είναι αδύνατη

**δ)**  = 27 άρα 3⋅ = 3⋅27

(x9)2 81 = 0

[(x9) + 9][(x9) 9] = 0

x( x18) = 0

x = 0 ή x 18 = 0

x = 0 ή x = 18

**ε)** ( 3x1)2  4x2 = 0 άρα [(3x1) + 2x][(3x1) 2x] = 0

(5x 1)( x1) = 0

5x1 = 0 ή x 1 = 0

x =  ή x = 1

**στ)** (x + )2 3 = 0 άρα (x + )2  ()2 = 0

[(x + ) + ][(x + ) ] = 0

(x + 2)x = 0

x = 0 ή x + 2 = 0

x = 0 ή x = 2

**4.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** (3x + 1) 2 = 5( 3x + 1) **β)** 0,5 (1y)2 = 18 **γ)** (2ω2 + 1)(ω216) = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** (3x + 1) 2 = 5(3x + 1) άρα (3x + 1) 2  5(3x + 1) = 0

(3x + 1) [(3x + 1) 5] = 0

(3x + 1) (3x 4) = 0

3x + 1 = 0 ή 3x 4 = 0

x =  ή x = 

**β)** 0,5 (1y)2 = 18 άρα (1y)2  = 36

(1y)2 36 = 0

[(1y) + 6][(1y) 6] = 0

(7y)(y 5) = 0

7y = 0 ή y 5 = 0

y = 7 ή y = 5

**γ)** (2ω2 + 1)(ω216) = 0 άρα (2ω2 + 1)(ω4) ( ω + 4 ) = 0

2ω2 + 1= 0 ή ω4 = 0 ή ω + 4 = 0

2ω2 + 1= 0 αδύνατο ή ω = 4 ή ω =4

ω = 4 ή ω =4

**5.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** x(x4) =4 **β)** y2 + y 12 = 0 **γ)** ω2 2ω – 15 = 0

**δ)** 2t2 7t + 6 = 0 **ε)** 3φ2 + 1 = 4φ **στ)** 5z2 3z 8 = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x(x4) =4 άρα x24x + 4 = 0

(x2)2 = 0

x = 2 διπλή ρίζα

**β)** y2 + y 12 = 0 άρα (y + 4)(y3) = 0

y + 4 = 0 ή y3 = 0

y =4 ή y = 3

**γ)** ω2 2ω – 15 = 0 άρα (ω + 3)(ω5) = 0

ω + 3 = 0 ή ω5 = 0

ω =3 ή ω = 5

**δ)** 2t2 7t + 6 = 0 άρα 2t2 4t 3t + 6 = 0

2t( t2) 3( t2) = 0

(t2)(2t3) = 0

t2 = 0 ή 2t3 = 0

t = 2 ή t =

**ε)** 3φ2 + 1 = 4φ άρα 3φ2 4φ + 1 = 0

3φ2 3φ φ + 1 = 0

3φ(φ1)  (φ1) = 0

(φ1)(3φ1) = 0

φ1 = 0 ή 3φ1 = 0

φ = 1 ή φ =

**στ)** 5z2 3z 8 = 0 άρα 5z2 + 5 z8z 8 = 0

5z(z + 1) – 8(z +1) = 0

(z + 1) (5z –8 ) = 0

z + 1= 0 ή 5z –8 = 0

z = – 1 ή z =

**6.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** 25x2 + 10x + 1 = 0 **β)** y2(y2) + 4y( y2) + 4y – 8 = 0

**γ)** ω2 + 2006ω 2007 = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** 25x2 + 10x + 1 = 0 άρα (5x + 1)2 = 0

5x + 1= 0

x = διπλή ρίζα

**β)** y2(y2) + 4y(y2) + 4y – 8 = 0 άρα y2(y2) + 4y(y2) + 4(y – 2) = 0

(y2) (y2 + 4y + 4) = 0

(y2) (y+ 2) 2 = 0

y = 2 ή y = –2 διπλή ρίζα το –2

**γ)** ω2 + 2006ω 2007 = 0 άρα ω2 + 2007ω ω 2007 = 0

ω(ω1) + 2007(ω1) = 0

(ω1) (ω + 2007) = 0

ω1 = 0 ή ω + 2007 = 0

ω = 1 ή ω =2007

**7.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** x2 – ( α + β) x + αβ = 0 **β)** x2 – (1) x = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** x2 – ( α + β) x + αβ = 0 άρα (x – α)(x – β) = 0

x – α = 0 ή x – β = 0

x = α ή x = β

**β)** x2 – (1) x = 0 άρα (x – )(x + 1) = 0

x – = 0 ή x + 1 = 0

x =  ή x = – 1

**8.**

 Οριζόντια :

1.Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης x2 = 12 x

– ρίζα της εξίσωσης x2 + 225 = 30x

2.Γινόμενο ριζών της εξίσωσης x( x + 4) + 8( x + 4) = 0

3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης x210x + 9 = 0

4.Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της

εξίσωσης x2 = 25 – Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης

x2 = 32 x

Κάθετα :

1. ρίζα της εξίσωσης x2 20x + 100 = 0

2. To ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης x(x15) = x15

3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (x5)2 – ( x5) = 0

4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης x2144 =0

5. Ρίζα της εξίσωσης x2( x12) + 2007(x12) = 0

 Οριζόντια :

1. α) x2 = 12 x ή x2 12 x = 0

x( x12 ) = 0

x = 0 ή x = 12 δεκτό το 12

β) x2 + 225 = 30x

x2 30x + 225 = 0

(x15) 2 = 0 άρα x = 15

2 . x( x + 4) + 8( x + 4) = 0

(x + 4)( x + 8)= 0

x + 4 = 0 ή x + 8 = 0 άρα

x = 4 ή x = 8 με γινόμενο 32

3 . x210x + 9 = 0

(x1)(x9) = 0

x1 = 0 ή x9 = 0 άρα

x = 1 ή x = 9 με άθροισμα 10

4 . α) x2 = 25

x2 25 = 0

(x5)(x + 5) = 0

x5 = 0 ή x + 5 = 0 άρα

x = 5 ή x = 5 με | 5⋅5| = 25

β) x2 = 32x ή x2 32 x = 0

x( x32 ) = 0

x = 0 ή x = 32 δεκτό το 32

**Κάθετα :**

1 . x2 20x + 100 = 0

( x10) 2 = 0 άρα x = 10

2 . x(x15) = x15

x(x15) – ( x15) = 0

(x15)( x – 1) = 0

x15 = 0 ή x – 1 = 0 άρα x = 15 ή x = 1 με ακέραιο πηλίκο 15

3. (x5)2 – ( x5) = 0

(x5)[(x– 5)1] = 0

(x5)(x– 6) = 0

x5 = 0 ή x– 6 = 0 άρα x =5 ή x = 6 με γινόμενο 30

4. x2144 = 0

( x12)( x + 12 ) = 0

x12 = 0 ή x + 12 = 0 άρα x =12 ή x =12 δεκτό το 12

5. x2( x12) + 2007(x12) = 0

(x12 )( x2 + 2007) = 0

x12 = 0 ή x2 + 2007 = 0 που είναι αδύνατο

άρα x = 12

το λυμένο σταυρόλεξο φαίνεται παραπάνω

**2.2 B. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ**

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ**

**ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΥΠΟΥ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 96 – 97**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης αx2 + βx + γ = 0 , α ≠ 0 τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης Α το σωστό συμπέρασμα από τη

στήλη Β.

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στήλη Β |
| α . Δ >0 | 1.Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση |
| β. Δ = 0 | 2.Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις |
| γ. Δ ≥ 0 | 3.Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση |
| δ. Δ < 0 | 4. Η εξίσωση δεν έχει λύση |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| α | β | γ | δ |
| 2 | 3 | 1 | 4 |

**Απάντηση**

Από την θεωρία ξέρουμε ότι

α . Αν Δ > 0, η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις. Άρα α → 2

β. Αν Δ = 0, η εξίσωση έχει μία διπλή λύση. Άρα β →3

γ. Αν Δ ≥ 0, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση. Άρα γ → 1

δ. Αν Δ < 0, η εξίσωση δεν έχει λύση . Άρα δ → 4

**2.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική τότε δεν έχει λύση (Λ)

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν τότε έχει

μία τουλάχιστον λύση (Σ)

γ) Η εξίσωση 2x2 + 4x 6 = 0 έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και 3,

οπότε το τριώνυμο 2x2 + 4x 6 γράφεται 2x2 + 4x  6 = ( x1)(x + 3) (Λ)

**Απάντηση**

Από τη θεωρία ξέρουμε ότι

α) αν Δ > 0, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες . Άρα (Λ)

β) αν Δ ≥ 0, τότε η εξίσωση έχει ή δύο ρίζες άνισες ή δύο ρίζες ίσες . Άρα (Σ)

γ) το τριώνυμο γράφεται 2x2 + 4x 6 = 2( x1)(x + 3). Άρα (Λ)

**3.**

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με την βοήθεια του τύπου

α) 2x2 = 7x β) 3x22x + 8 = 0 γ) 2x2 + 50 = 0 δ) 5x2 + x – 4 = 0

**Προτεινόμενη λύση**

Οι εξισώσεις α και γ λύνονται εύκολα χωρίς τη χρήση του τύπου, ως εξής

2x2 = 7x άρα 2x2  7x = 0

x(2x  7) = 0

x = 0 ή 2x – 7 = 0

x = 0 ή x = 

2x2 + 50 = 0 άρα –2(x2 – 25) = 0

–2(x – 5)( x + 5 ) = 0

x – 5 = 0 ή x + 5= 0

x = 5 ή x = – 5

Για τις δύο άλλες προτιμότερος είναι ο τύπος

**Ασκήσεις**

**1.**

Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή αx2 + βx + γ = 0 και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Εξίσωση | αx2 + βx + γ = 0 | α | β | γ |
| x(x1) =  2 | x2x + 2 = 0 | 1 | 1 | 2 |
| 3x2 + 4 =2( x + 2) | 3x2  2x = 0 | 3 | 2 | 0 |
| (x1)2 = 2( x2x) | x21 = 0 | 1 | 0 | 1 |

**Προτεινόμενη λύση**

x(x1) =  2 άρα x2x + 2 = 0 με α = 1 , β =1 και γ = 2

3x2 + 4 =2( x + 2) άρα 3x2 + 4 = 2x + 4

3x2  2x = 0 με α = 3 , β =2 και γ = 0

(x1)2 = 2( x2x) άρα x22x + 1 = 2x22x

x21 = 0 με α = 1 , β = 0 και γ =1

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

**2.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** x2x2 = 0 **β)** 4y2 + 3y1 = 0 **γ)** 2ω2 + ω + 6 = 0

**δ)** 2z23z + 1 = 0 **ε)** 25t2 + 10t 1 = 0 **στ)** 4x2 12x + 9 = 0

**ζ)** 3x2 + 18x + 27 = 0 **η)** x24x = 5 **θ)** x23x + 7 = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2x2 = 0

Δ = β24αγ = (1)2  4 ⋅1⋅ (2) = 1 + 8 = 9 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x1,2 =  =  = 

άρα x1 = = 2 ή x2 =  =1

**β )**

4y2 + 3x1 = 0

Δ = β24αγ = 32 4 ⋅ 4 ⋅ (1) = 9 + 16 = 25 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις y1,2 =  = = 

άρα y1 = =  ή y2 =  =1

**γ)**

2ω2 + ω + 6 = 0 άρα 2ω2 – ω6 = 0

Δ = β24αγ = (1)2 4 ⋅ 2 ⋅ (6) = 1 + 48 = 49 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις ω1,2 =  = = 

άρα ω1 = = 2 ή ω2 =  =

**δ)**

2z23z + 1 = 0

Δ = β24αγ = (3)2 4⋅2⋅1 = 9 8 = 1 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις, z1,2 =  = = 

άρα z1 = = 1 ή z2 =  =

**ε)**

25t2 + 10t 1 = 0 άρα 25t2  10t + 1 = 0

Δ = β24αγ = (10)2 4⋅25⋅1 = 100 100 = 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες (μία διπλή), την t1 = t2 = = = 

**στ)**

4x2 12x + 9 = 0

Δ = β24αγ = (12)2 4⋅4⋅9 = 144 144 = 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες (μία διπλή), την x1 = x2 = = =

**ζ)**

3x2 + 18x + 27 = 0

Δ = β24αγ = 182 4 ⋅3⋅27 = 324 324 = 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες (μία διπλή) , την x1 = x2 = = = 3

**η)**

x24x = 5 ή x24x  5 = 0

Δ = β24αγ = (4)2 4⋅1⋅(5) = 16 + 20 = 36 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x1,2 =  = = 

άρα x1 = = 5 ή x2 =  =1

**θ )**

x23x + 7 = 0

Δ = β24αγ = (3)2 4⋅ 1⋅7 = 928 = 19 < 0

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη

**3.**

Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** x27x = 0 **β)** x216 = 0

**i)** Με την βοήθεια του τύπου **ii)** με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

**Προτεινόμενη λύση**

**i)** **α)**

x27x = 0

Δ = β24αγ = (7)2 4⋅1⋅0 = 49 > 0

επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x1,2 =  = = 

άρα x1 = = 7 ή x2 =  = 0

**i) β)**

x216 = 0

Δ = β24αγ = 02 4⋅1⋅(16) = 64 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x1,2 =  = = 

άρα x1 = = 4 ή x2 =  = 4

**ii)** **α)**

x27x = 0 άρα x (x7) = 0

x = 0 ή x7 = 0

x = 0 ή x = 7

**ii) β)**

x216 = 0 άρα (x + 4) (x4) = 0

x + 4 = 0 ή x4 = 0

x = 4 ή x = 4

**4.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  3x2 2(x1) = 2x + 1 **β)** ( y + 2) 2 + ( y1)2 = 5(2y + 3)

**γ)** (2ω3)2 – (ω2)2 = 2ω2 – 11 **δ)** φ(8φ) – ( 3φ + 1)(φ + 2) = 1

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

3x2 2(x1) = 2x + 1 άρα 3x2 2x + 2 = 2x + 1

3x2 4x + 1= 0

Δ = β24αγ = (4)2 4⋅3⋅1 = 4 > 0

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x1,2 =  = = 

άρα x1 = = 1 ή x2 =  = 

**β)**

(y + 2) 2 + ( y1)2 = 5(2y + 3) άρα y2 + 4y + 4 +y22y + 1 = 10y + 15

2y28y10 = 0

y24y5 = 0

Λύνοντας κατά τα γνωστά βρίσκουμε τις ρίζες y1 = 5 , y2 =1

**γ)**

(2ω3)2 – (ω2)2 = 2ω2 – 11 άρα 4ω212ω + 9 – (ω24ω + 4) = 2ω2 – 11

4ω212ω + 9 – ω2 + 4ω – 4 = 2ω2 – 11

ω28ω + 16 = 0

Λύνοντας κατά τα γνωστά βρίσκουμε τις ρίζες ω1 = 4 , ω2 = 4

**δ)**

φ(8φ) – ( 3φ + 1)(φ + 2) = 1 άρα 8φφ2 – ( 3φ2 + 6φ + φ + 2) = 1

8φφ2 – 3φ2 – 6φ – φ – 2 = 1

4φ2 – φ + 3 = 0

Δ = – 11 < 0 , επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη

**5.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  = x2 **β)**   = 2

**γ)** 0,5t2 – 0,4 ( t + 2) = 0,7( t – 2) **δ)**  ( ω – 7) = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 = x2 άρα 15⋅ 15⋅= 15x30

5(x2 1)  3(x + 3) = 15 x – 30

5x2 5 3x 9 = 15 x – 30

5x2 18x + 16 = 0

Δ = 4 > 0 και ρίζες x1= 2 , x2 =

**β)**

  = 2 άρα 12⋅ 12⋅ = 12⋅24

4y2 3(6y + 1) = 2(y2) 24

4y2 18y  3 = 2y4 24

4y2 20y + 25 = 0

Δ = 0 και ρίζες y1= y2 =

**γ)**

0,5t2 – 0,4 (t + 2) = 0,7(t – 2) άρα 5t2 – 4 (t + 2) = 7(t – 2)

5t2 – 4t – 8 = 7t – 14

5t2 – 11t + 6 = 0 ,

Δ = 1 > 0 και ρίζες t1= 1, t2 =

**δ)**

 (ω – 7) =  άρα 2⋅ (ω – 7) = 2

ω(ω – 7) = 2

ω2 – 7ω + 2 = 0

Δ = 25 > 0 και ρίζες ω1 =  , ω 2 =2

**6.**

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

**α)** x2 + 4x 12 **β)** 3y28y +5 **γ)** 2ω2 + 5ω 3

**ε)** x2 16x + 64 **στ)** 9y2 +12y + 4 **ζ)** –ω2 + 10ω 25

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

x2 + 4x 12 , Δ = 64 , x1= 2 , x2 =6 άρα x2 + 4x 12 = (x2)(x + 6)

**β)**

3y28y + 5 , Δ = 4 , y1 = 1 , y2 = άρα 3y28y +5 = 3(y1)

**γ)**

2ω2 + 5ω 3 , Δ = 1, ω1 = , ω2 =  άρα 2ω2 + 5ω 3 = 2 (ω1)

**ε)**

x2 16x + 64 , Δ = 0 , x1= x2 = 8, άρα x2 16x + 64 = (x8)2

**στ)**

9y2 +12y + 4 , Δ = 0 , y1 = y2 = άρα 9y2 +12y + 4 = 9

**ζ)**

– ω2 + 10ω 25 , Δ = 0 , ω1= ω2 = 5 άρα – ω2 + 10ω 25 = – (ω5)2

**7.**

Αν α , β πραγματικοί αριθμοί με α ≠ 0 , να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον λύση.

**α)** αx2 – x + 1α = 0 **β)** αx2 + (α + β) x + β = 0

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

αx2 – x + 1α = 0 , Δ = 1 4α(1α) = 4α24α + 1 = ( 2α1)2 ≥ 0

Άρα η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

Ειδικότερα : αν Δ = 0, δηλαδή αν 2α1 = 0, συνεπώς α = , η εξίσωση έχει μία

διπλή λύση

αν Δ > 0 , δηλαδή αν α ≠  , τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες

**β)**

αx2 + ( α + β) x + β = 0

Δ = (α + β) 2 – 4αβ = α2 + 2αβ + β2 – 4αβ = α2 – 2αβ + β2 = (α – β) 2 ≥ 0

Άρα η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

Ειδικότερα : αν Δ = 0, δηλαδή αν αβ = 0, συνεπώς α = β, η εξίσωση έχει μία

διπλή λύση

αν Δ > 0 , δηλαδή αν α ≠ β, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες

**8.**

Δίνεται η εξίσωση (α + γ) x22βx + (αγ) = 0 , όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο .

Αφού η εξίσωση έχει διπλή λύση, είναι Δ = 0 άρα 4β24(α + γ)( αγ) = 0

β2( α2γ2) = 0

β2α2 + γ2 = 0

α2 = β2 + γ2

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

**2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 101 – 102**

**Ασκήσεις**

**1 .**

Να υπολογίσετε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις

**Προτεινόμενη λύση**

α) Ε = πρ2 άρα 314 = 3,14 x2 άρα x2 = = 100 οπότε x = 10

β) Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει x2 + x2 = δ2 άρα 2x2 = δ2

2x2 =

2x2 = 49 ⋅2

x2 = 49 άρα x = 7

γ) Ε = x(x + 1) άρα 20 = x2 + x

x2 + x20 = 0

ρίζες x = 4 ή x =5 δεκτή τιμή η x = 4, αφού το x είναι μήκος

δ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι δ2 = x2 + ( x + 2)2

100 = x2 + x2 + 4x + 4

2x2 + 4x 96 = 0

x2 + 2x 48 = 0

ρίζες x = 6 ή x =8

Επειδή το x δηλώνει μήκος, δεκτή τιμή η x = 6

**2.**

Να βρείτε έναν θετικό αριθμό, τέτοιον ώστε

**α)** Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιο του.

**β)** Το γινόμενό του με έναν αριθμό που είναι κατά 2 μικρότερος να είναι ίσο με 24.

**γ)** Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το

πενταπλάσιό του.

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός τότε

**α)**  = 2x άρα x2 = 4x

x2 4x = 0

x (x 4) = 0

x = 0 ή x = 4 δεκτή τιμή η x = 4

**β)** x( x2) = 24 άρα x2 2x 24 = 0 απ’ όπoυ προκύπτει ότι x = 6

**γ)** 2x2 3 = 5x άρα 2x2 5x 3 = 0 απ’ όπoυ προκύπτει ότι x = 3

**3.**

Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι 10 λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 2,5 dm και βάση τετράγωνο , να βρείτε

το μήκος της πλευράς του (1λίτρο = 1dm3)

**Προτεινόμενη λύση**

Αν x είναι η πλευρά της τετραγωνικής βάσης και υ το ύψος, τότε ο όγκος V

του παραλληλεπιπέδου είναι V = υx2 άρα 10 = 2,5x2

x2 = 4

x = 2 dm

**4.**

Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m 2. Αν το μήκος του είναι

5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x m το πλάτος. Τότε το μήκος είναι x + 5

Οπότε Ε = x (x + 5) άρα 150 = x2 + 5x

x2 + 5x150 = 0 απ’ όπoυ προκύπτει ότι x = 10 m

Άρα η περίμετρος του οικοπέδου είναι Π = 10 + 15 + 10 + 15 = 50

Επομένως χρειάζονται 50 m σύρμα

**5.**

Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακεραίους που το άθροισμα των τετραγώνων

τους είναι 74 .

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω 2ν + 1 ο μικρότερος περιττός, οπότε ο μεγαλύτερος θα είναι ο 2ν + 3.

Τότε (2ν + 1) 2 + ( 2ν + 3) 2 = 74 άρα 4ν2 + 4ν + 1 + 4ν2 + 12ν + 9 – 74 = 0

8ν2 + 16 ν – 64 = 0

ν2 + 2ν – 8 = 0

ρίζες ν = – 4 ή ν = 2

Όταν ν = – 4, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι – 7 και – 5

Όταν ν = 2 , οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 5 και 7.

**6.**

Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε

« Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες

σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x ο αριθμός της αριστερά σελίδας . Τότε x + 1 είναι ο αριθμός της δεξιά.

Οπότε x( x + 1) = 506 άρα x2 + x –506 = 0

ρίζες x = 22 , x = – 23

Δεκτή τιμή η x = 22, οπότε οι σελίδες είναι οι 22 και 23.

**7.**

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες

ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας) . Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες,

πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x το πλήθος των ομάδων. Τότε η μία εξ αυτών έδωσε με τις x –1 υπόλοιπες

x –1 αγώνες. Άρα οι x ομάδες έδωσαν x(x–1) αγώνες.

Οπότε x( x–1) = 240 άρα x2 – x –240 = 0 απ’ όπoυ προκύπτει ότι x = 16

**8.**

Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4cm , 6cm , 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη

κατά x cm, το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x.

**Προτεινόμενη λύση**

Οι πλευρές, αυξημένες κατά x, έχουν μήκη 4 + x , 6 + x , 8 + x με προφανώς μεγαλύτερη την 8 + x.

Πυθαγόρειο θεώρημα : (8 + x) 2 = ( 4 + x) 2 + ( 6 + x) 2

64 + 16 x + x2 = 16 + 8x + x2 + 36 + 12 x + x 2

x2 + 4x –12 = 0

ρίζες x = 2 , x = – 6 Δεκτή τιμή η x = 2

**9.**

Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσων ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μία ακόμα φορά αφού τους είπε :.

« Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους, βρίσκετε τον ίδιο αριθμό»

Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x η ηλικία του καθηγητή σήμερα.

Τότε πριν 5 χρόνια η ηλικία του ήταν x – 5 και μετά από 5 χρόνια θα είναι x + 5. Οπότε (x – 5)(x + 5) = 1200 άρα x2 = 1225 οπότε x = 35

Αν y είναι η ηλικία των παιδιών, τότε y2 = 2y άρα y2 – 2y = 0

ρίζες y = 0 ή y = 2 δεκτή τιμή η y = 2

**10.**

Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι

μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm.

Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ έτσι ώστε

η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ τότε το

εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά 

του αρχικού του εμβαδού.

Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x πλάτος του φύλλου , τότε το μήκος του είναι x + 6 και το εμβαδόν του

Ε = x (x + 6)

Διπλώνοντας το φύλλο , σύμφωνα με το πρόβλημα , αυτό μικραίνει κατά το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΕΓΔ με κάθετες πλευρές ίσες με το πλάτος x του ορθογωνίου .

Το εμβαδόν του τριγώνου ΕΓΔ είναι ίσο με (ΕΓΔ) =  =  = 

Αυτό όμως το εμβαδόν είναι ίσο με τα  του αρχικού εμβαδού.

Επομένως έχουμε την εξίσωση  = x ( x + 6)

4x2 = 3x( x + 6)

x2 –18 x = 0 με

ρίζες x = 0 ή x = 18 δεκτή τιμή η x = 18

Επομένως το πλάτος του ορθογωνίου είναι 18 cm και το μήκος 24 cm

**11.**

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό

σιντριβάνι και γύρω από αυτό να στρώσουμε

με βότσαλα έναν κυκλικό δακτύλιο πλάτους 3m .

Αν ο δακτύλιος πρέπει να έχει εμβαδόν

τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το

σιντριβάνι , να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού .

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν του σιντριβανιού είναι ίσο με Ε σ = π ΟΑ2

Το εμβαδόν του σιντριβανιού μαζί με το βότσαλο είναι ίσο με Εολ = πΟΒ2 =

= π(ΟΑ + 3)2

Το εμβαδόν του βότσαλου είναι ίσο με Εβ = πΟΒ2 – πΟΑ2 =

= π(ΟΑ + 3)2– πΟΑ2

Από την υπόθεση θέλουμε να είναι Εβ = 3 Εσ άρα π(ΟΑ + 3)2 – πΟΑ2 = 3πΟΑ2

(ΟΑ + 3)2 – ΟΑ2 = 3ΟΑ2

ΟΑ2 + 6ΟΑ + 9 – 4ΟΑ2 = 0

3ΟΑ2 – 6ΟΑ – 9 = 0

ΟΑ2 – 2ΟΑ – 3 = 0

λύνοντας την εξίσωση ΟΑ = 3 m

**12.**

Για την κατασκευή μιας κλειστής κυλινδρικής δεξαμενής καυσίμων ύψους 6m χρειάστηκαν 251,2 m2 λαμαρίνας. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης της

δεξαμενής.

**Προτεινόμενη λύση**

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κυλινδρικής δεξαμενής είναι ίσο με

Εολ = Ε παράπλευρο + 2 Ε βάσης

Αν ρ είναι η ακτίνα της βάσης και υ το ύψος της δεξαμενής, τότε Εολ = 2πρυ + 2πρ2

Με βάση τα δεδομένα πρέπει 251,2 = 2⋅3,14 ρ⋅6 + 2⋅3,14 ρ2

6,28ρ2 + 6⋅ 6,28ρ – 251, 2 = 0

ρ2 + 6ρ – 40 = 0

ρίζες ρ = – 10 , ρ = 4 δεκτή τιμή η ρ = 4 m

**13.**

Παρατηρώντας την πτώση ενός σώματος που

αφέθηκε από την κορυφή Κ ενός ουρανοξύστη

διαπιστώνουμε ότι στα δύο τελευταία δευτερόλεπτα

της κίνησής του διήνυσε μία απόσταση ΠΕ ίση με

τα  του ύψους του ουρανοξύστη. Να βρείτε

πόσο χρόνο διήρκησε η πτώση του σώματος και

ποιο ήταν το ύψος του ουρανοξύστη

( g = 10 m/sec2)

**Προτεινόμενη λύση**

Από την φυσική γνωρίζουμε ότι το διάστημα που διανύει το σώμα κατά την πτώση του, δίνεται από τον τύπο S = gt2 = ⋅10t2 = 5t2 m, όπου t η διάρκεια της πτώσης .

Άρα το ύψος h του ουρανοξύστη είναι h = 5t2

Δίνεται ότι την απόσταση ΠΕ την διάνυσε το σώμα τα δύο τελευταία δευτερόλεπτα της πτώσης του, άρα την απόσταση ΚΠ την διάνυσε σε χρόνο t – 2 , t > 2

Οπότε ΚΠ = 5( t– 2)2 .

Όμως ΠΕ = h άρα ΚΠ = h

Επομένως έχουμε 5(t– 2)2 = ⋅5t2 άρα 9(t – 2)2 = 4⋅t2

5t2 – 36t + 36 = 0 με

ρίζες t = 6 , t =

Και επειδή t > 2, δεκτή τιμή η t = 6 sec.

Οπότε η πτώση διήρκησε 6 sec και το ύψος του ουρανοξύστη ήταν h = 5⋅62 = 180 m

**2.4 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

**Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 106 – 108**

**Ερωτήσεις κατανόησης**

**1.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

**α)** Οι όροι της εξίσωσης  +  = 8 ορίζονται αν x ≠ 0 και x ≠1 (Σ)

**β)** Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης +  = 2 (Λ)

**γ)** Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης

 +  = 2, τότε αυτή γράφεται 5x + 3 = 2 (Λ)

**δ)** Oι όροι της εξίσωσης  = x ορίζονται για

κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της (Σ)

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** Πρέπει να ισχύει x1 ≠ 0 και x ≠ 0 , δηλαδή x ≠ 0 και x ≠1

συνεπώς (Σ)

**β)** Όχι , διότι για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει x +1 ≠ 0 και x ≠ 0 ,

δηλαδή x ≠ 1 και x ≠ 0, οπότε (Λ)

**γ)** Η απαλοιφή των παρονομαστών δίνει 5x + 3 = 2x2 , άρα (Λ)

**δ)** Επειδή x2 + 1 ≠ 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x και για x = 0 η εξίσωση

γίνεται 0 = 0, δηλαδή η εξίσωση επαληθεύεται, η πρόταση είναι (Σ)

**2.**

Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε  . Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση ;

α)  =  β)  =  γ)  =  δ)  = 

**Προτεινόμενη λύση**

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι είναι η (γ)

**3.**

Η εξίσωση + = 6 έχει ως λύση τον αριθμό

α) x =1 β) x = 1 γ) x = 0 δ) x = 2

**Προτεινόμενη λύση**

Το 1 και το 1 δεν μπορεί να είναι λύσεις διότι μηδενίζουν τους παρονομαστές.

Για x = 0 , η εξίσωση γίνεται 2 + 4 = 6 που είναι ψευδές .

Ενώ για x = 2 η εξίσωση γίνεται 4 + 2 = 6 που είναι αληθές .

Επομένως σωστό το (δ).

**4.**

Ένας μαθητής, για να λύσει την εξίσωση  = , έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση 2x1 = 1 που προέκυψε βρήκε

ως λύση τον αριθμό x = 1 . Η απάντηση του είναι σωστή ;

**Προτεινόμενη λύση**

Όχι διότι, για x = 1 δεν ορίζεται η εξίσωση αφού μηδενίζονται οι παρονομαστές

**Ασκήσεις**

**1.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  =  **β)**  =  **γ)**  = 

**δ)**  +  =  **ε)**  = 2  **στ)** 1 = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

ΕΚΠ = 2(x1). Οπότε πρέπει 2(x1) ≠ 0 άρα x ≠ 1

 =  άρα 2( x1) = 2(x1) , 4 = x1 , x = 5

**β)**

ΕΚΠ = 3(2y3). Οπότε πρέπει 3(2y3) ≠ 0 άρα y ≠ 

 =  άρα 3(2y3)  = 3(2y3)

21 =2y + 3

2y =18

y = 9

**γ)**

ΕΚΠ = ω2 . Οπότε πρέπει ω2 ≠ 0 άρα ω ≠ 2

 =  άρα (ω2) = (ω2 )

4ω + 1 = 9

4ω = 8

ω = 2

Ρίζα που απορρίπτεται λόγω του περιορισμού

**δ)**

ΕΚΠ = 10α , οπότε πρέπει 10α ≠ 0 άρα α ≠ 0

 +  =  άρα 10α + 10α = 10α

14 + 3α = 20

3α = 6

α = 2

**ε)**

 = 2  άρα  = 2 +

ΕΚΠ = x3. Οπότε πρέπει x3 ≠ 0 άρα x ≠ 3

 = 2 + άρα (x3)  = 2 (x3) + (x3) 

2x + 1 = 2x6 + 7

0x = 0

Εξίσωση που αληθεύει για κάθε x εκτός του 3

**στ)**

1 =  άρα 1 = 

ΕΚΠ = y2, οπότε πρέπει y2 ≠ 0 άρα y ≠ 2

1 =  άρα (y2)1 (y2)= ( y2)

y25 = (6y)

y25 = 6 + y

0y = 1 αδύνατη εξίσωση

**2.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  = 1 **β)**  + = 2

**γ)**   =  **δ)**  = 1

**ε)**  =  +  **στ)**  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

ΕΚΠ = x2 , οπότε πρέπει x2 ≠ 0 άρα x ≠ 0

 = 1 άρα x2 = 1 x2

4x3 = x2

x24x + 3 = 0

Δ = 4 > 0 και ρίζες x = 1 , x = 3

**β)**

ΕΚΠ = y(y1) , οπότε πρέπει y(y1) ≠ 0 άρα y ≠ 0 και y ≠ 1

 + = 2 άρα y(y1)  + y(y1)  = 2y(y1)

5(y1) + 4y =2y(y1)

5y5 + 4y =2y22y

2y211y + 5 = 0

Δ = 81 > 0 και ρίζες y = 5 , y =

**γ)**

ΕΚΠ = ω2(ω + 2) , οπότε πρέπει ω2(ω + 2) ≠ 0 άρα ω ≠ 0 και ω ≠ 2 τότε

  =  άρα ω2(ω + 2)  ω2(ω + 2)  = ω2(ω + 2) 

7ω( ω + 2) 3ω2 = 6( ω + 2)

7ω2 + 14ω 3ω2 = 6ω + 12

4ω2 + 8ω 12 = 0

ω2 + 2ω 3 = 0

Δ = 16 > 0 και ρίζες ω = 1 , ω = 3

**δ)**

ΕΚΠ = (α2)2 , οπότε πρέπει (α2)2 ≠ 0 άρα α ≠ 2 τότε

 = 1 άρα (α2)2  (α2)2  = 1(α2)2

43(α2) = (α2)2

43α+ 6 = α24α + 4

α2α6 = 0

Δ = 25 > 0 και ρίζες α = 3 , α = 2

**ε)**

ΕΚΠ = x(x + 3) , οπότε πρέπει x(x + 3) ≠ 0 άρα x ≠ 0 και x ≠3

 =  +  άρα

x(x + 3)  = x(x + 3)  + x(x + 3) 

6 = ( x + 3)( x+ 2) + x ( x + 1)

6 = x2 + 2x + 3x + 6 + x2 + x

2x2 + 6x = 0

x2 + 3x = 0

x( x + 3) = 0 άρα x = 0 ή x =3

Ρίζες που απορρίπτονται λόγω των περιορισμών, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

**στ)**

ΕΚΠ = y(y +1) , οπότε πρέπει y(y + 1) ≠ 0 άρα y ≠ 0 και y ≠ 1

 =  άρα y(y +1)  y(y +1) = y(y +1) 

(y + 1)(y1) 2y = y + 3

y2 12y = y + 3

y2 3y4 = 0

Δ = 25 > 0 και ρίζες y = 4 , y =1

Η y = 1 απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

**3.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)**  =  **β)**  = 0

**γ)**   =  **δ)**  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

 =  άρα  = 

ΕΚΠ = (x 5)(x + 5) , οπότε πρέπει (x5)(x + 5) ≠ 0 άρα x ≠ 5 και x ≠5

 =  άρα (x 5)(x + 5)  = (x 5)(x + 5)

x + 5 = 3(x 5)

x + 5 = 3x 15

2x = 20

x = 10

**β)**

 = 0 άρα  = 0

ΕΚΠ = (y 2)(y +1) , οπότε πρέπει (y 2)(y +1) ≠ 0 άρα y ≠ 2 και y ≠ 1  = 0 άρα (y 2)(y +1)  (y2)(y +1)  = 0

y + 1 (y + 1) = 0

0y = 0

Εξίσωση που αληθεύει για κάθε y εκτός των 2 και 1

**γ)**

  =  άρα   = 

ΕΚΠ = ω(ω 1) , οπότε πρέπει ω(ω1) ≠ 0 άρα ω ≠ 0 και ω ≠ 1

  =  άρα ω(ω 1)  ω(ω 1)  = ω(ω 1) 

ω2 + 5 – ω( ω + 5) = ω 1

ω2 + 5 – ω2 5 = ω 1

ω 1= 0

ω = 1

Ρίζα που απορρίπτεται λόγω του περιορισμού, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

**δ)**

 =  άρα  = 

ΕΚΠ = α(α2) , οπότε πρέπει α(α2) ≠ 0 άρα α ≠ 0 και α ≠ 2

 =  άρα α(α2)  + α(α2)  = α(α2) 

1 + (α2)( α1) = α2

1 + α2 2α – α + 2 = α2

33α = 0

α = 1

**4.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** 1= 0 **β)**  = 3

**γ)**  =  **δ)** 1 +  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

1= 0 άρα 1= 0

ΕΚΠ = y(y 1), οπότε πρέπει y(y 1) ≠ 0 άρα y ≠ 0 και y ≠ 1

1= 0 άρα y(y 1) ⋅1 y(y 1)  y(y 1) = 0

y(y 1) (y 1) 1 = 0

y2 y y + 11 = 0

y2 2y = 0

y(y 2) = 0

y = 0 ή y  2 = 0

y = 0 ή y = 2

Η y = 0 απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

**β)**

 = 3 άρα  = 3

ΕΚΠ = ω(ω + 2), οπότε πρέπει ω(ω + 2) ≠ 0 άρα ω ≠ 0 και ω ≠ 2

 = 3 άρα ω(ω + 2)  = 3 ω(ω + 2) ω(ω + 2) 

2ω2 = 3ω(ω + 2) 4ω

2ω2 = 3ω2 + 6ω 4ω

ω2 + 2ω = 0

ω(ω + 2) = 0

ω = 0 ή ω + 2 = 0

ω = 0 ή ω = 2

Απορρίπτονται λόγω των περιορισμών, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

**γ)**

 =  άρα  = 

ΕΚΠ = (x 2)2(x + 2), οπότε πρέπει (x2)2(x + 2) ≠ 0 άρα x ≠ 2 και x ≠2

 =  άρα

(x 2)2(x + 2)  = (x 2)2(x + 2) 

x + 2 = (x 2)( 2x 1)

x + 2 = 2x2 – x – 4x + 2

2x2 – 6x = 0

2x(x– 3) = 0

x = 0 ή x – 3 = 0

x = 0 ή x = 3

**δ)**

1 +  =  άρα 1 +  = 

ΕΚΠ = (α 1)(α2) , οπότε πρέπει (α1)(α2) ≠ 0 άρα α ≠ 1 και α ≠ 2

1 +  = 

1(α 1)(α2) + (α 1)(α2)  = (α 1)(α2)

(α 1)(α2) + 3α ( α1) = α + 4

α2 2αα + 2 + 3α23α = α + 4

4α2 7α2 = 0

Είναι Δ = 81 > 0 και ρίζες α = 2 ή α = 

Η α = 2 απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

**5.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** = **β)**  = 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Περιορισμοί : x ≠ 0 και x   ≠ 0 άρα

x ≠ 0 και x2  4 ≠ 0

x ≠ 0 και (x2) (x + 2) ≠ 0

x ≠ 0 και x2 ≠ 0 και x + 2 ≠ 0

x ≠ 0 και x ≠ 2 και x ≠ 2

 =  άρα  = 

 = 

=  ΕΚΠ = 3(x 2) ( x + 2)

3(x 2) ( x + 2) = 3(x 2) ( x + 2) 

3x2 = 4(x 2) ( x + 2) ή 3x2 = 4x2 16

x2 16 = 0

(x 4) (x + 4) = 0

x 4 = 0 ή x + 4 = 0

x = 4 ή x =4

**β)**

Περιορισμοί : x ≠ 0 και 1 +  ≠ 0 και x2 – 9 ≠ 0 άρα

x ≠ 0 και ≠ 0 και (x 3) ( x + 3) ≠ 0

x ≠ 0 και x + 3 ≠ 0 και x3 ≠ 0 και x + 3 ≠ 0

x ≠ 0 και x + 3 ≠ 0 και x3 ≠ 0

 =  άρα  = 

= 

ΕΚΠ = (x 3) ( x + 3) (x3) x (x + 3).2 = x6

x2 3x2x 6 = x6

x2 6x = 0

x (x 6) = 0

x = 0 ή x 6 = 0

x = 0 ή x = 6 δεκτή η x = 6

**6.**

Να λύσετε τους τύπους

**α)** ρ =  ως προς V **β)** Ε =  ως προς R

**γ)** R =  ως προς S **δ)**  = ως προς Τ1

**ε)**  =+  ως προς R  **στ)**  =+  ως προς α

**ζ)**  =+  ως προς  **η)** S =  ως προς λ

**Προτεινόμενη λύση**

**α)** ρ =  άρα ρV = m άρα V = 

**β)** Ε =  άρα 4ΕR = αβγ άρα R =

**γ)** R =  άρα RS = ρ άρα S = 

**δ)**  = άρα P1V1T2 = P2V2T1 άρα Τ1 = 

**ε)**  =+  άρα RR1R2 = RR1R2+ RR1R2

R1R2 = RR2 + RR1

R1R2 = R (R2 + R1)

R = 

**στ)**  =+  άρα αβγ = αβγ+ αβγ 

2αγ = βγ + αβ

2αγαβ = βγ

α(2γβ) = βγ

α = 

**ζ)**  =+  άρα β2γ2  = β2γ2 + β2γ2 

β2γ2 = γ2  + β2

β2γ2 = (γ2 + β2) 

= 

**η)** S =  άρα (1λ) S = (1λ) 

(1λ) S = α

Sλ S = α

Sα = λS άρα λ =

**7.**

**α)** Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα 

**β)** Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος  για να βρούμε τον αριθμό 

**γ)** Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που να έχουν λόγο 

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Έστω x ο ένας αριθμός και  ο αντίστροφός του , x ≠ 0 .

Τότε x + =  άρα 4x⋅x + 4x⋅= 4x⋅

4x2 + 4 = 17x

4x217x + 4 = 0

Δ = 225 > 0 και ρίζες x = 4 ή x =

Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι το 4 και το 

**β)**

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός.

Τότε  =  ΕΚΠ = 5(x + 5) ≠ 0 άρα x + 5 ≠ 0 άρα x ≠ 5

 =  άρα 5(x + 5)  = 5(x + 5) 

5(3 + x) = 4 (x + 5)

15 + 5x = 4x + 20

x = 5

**γ)**

Έστω 2x , 2x + 2 οι ζητούμενοι αριθμοί .

Τότε  =  ΕΚΠ = 4( 2x + 2) ≠ 0 άρα 2x + 2 ≠ 0

x + 1 ≠ 0

x ≠ 1

 =  άρα 4( 2x + 2)  = 4( 2x + 2)

8x = 3 (2x + 2)

8x = 6x + 6

2x = 6

x =3

Eπομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι : 2x = 2⋅3 = 6 και 2x + 2 = 2⋅3 + 2 = 8

**8.**

Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 € . Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και

3 παιδιά , οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει ο καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να

πληρώσει . Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν ;

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x το πλήθος των ατόμων που γευμάτισαν με x > 3 .

Τότε το κάθε ένα έπρεπε να πληρώσει  €

Επειδή συμφωνήθηκε τα τρία παιδιά να μην πληρώσουν τότε τα υπόλοιπα x3 άτομα θα κάλυπταν το ποσό των 84 € και το κάθε ένα έπρεπε να πληρώσει 

Για να συμβεί όμως αυτό, το ποσό των € θα έπρεπε να αυξηθεί κατά 9 €

Επομένως έχουμε την εξίσωση :  + 9 =  ΕΚΠ = x(x3 ) ≠ 0 αφού x > 3

x(x3 )  + 9x(x3 ) = x(x3 ) 

84(x3) + 9x(x3 ) = 84x

84x  252 + 9x2 27x = 84x

9x2 27x 252 = 0

x2 3x 28 = 0

Δ = 121 > 0 και ρίζες x =7 ή x =4 δεκτή η x = 7

Επομένως τα άτομα που γευμάτισαν ήταν 7 εκ των οποίων τα τρία παιδιά

**9.**

Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτηρίου και έδωσε 240 € . Πριν από λίγα χρόνια που η τιμή του πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη , με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε δύο πυροσβεστήρες

περισσότερους . Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω ότι ο διαχειριστής αγόρασε x , x > 0 πυροσβεστήρες.

Τότε καθένας κοστίζει σήμερα €.

Αν η αγορά γινότανε πριν λίγα χρόνια, τότε με τα 240€ θα αγόραζε x + 2 πυροσβεστήρες και η αξία του καθενός θα ήταν , αξία που είναι μικρότερη της σημερινής κατά 4 €. Επομένως έχουμε την εξίσωση

 = + 4 άρα x (x + 2)  = x (x + 2)  + 4 x (x + 2)

240(x + 2) = 240x + 4x2 + 8x

240x + 480 = 240x + 4x2 + 8x

4x2 + 8x480 = 0

x2 + 2x120 = 0

Δ = 484 και ρίζες x = 10 ή x = 12 δεκτή η x = 10

Επομένως ο διαχειριστής αγόρασε 10 πυροσβεστήρες.

**10.**

Αναμειγνύουμε 12gr ενός διαλύματος Α με 15gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm3 ενός διαλύματος Γ.

Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β

είναι 0,2 gr/cm3 μικρότερη.

**Προτεινόμενη λύση**

Από τη φυσική ξέρουμε ότι η πυκνότητα d, η μάζα m και ο όγκος V ενός υγρού συνδέονται με τον τύπο d =  άρα V = 

Οπότε αν d1 , V1 είναι η πυκνότητα και ο όγκος του διαλύματος Α και d2 , V2 είναι η πυκνότητα και ο όγκος του διαλύματος Β , τότε V1 =  , V2 = 

Και επειδή d2 = d10,2 , d1 > 0, 2 θα είναι V2 = 

Όμως V1 + V2 = 25, οπότε έχουμε την εξίσωση  + = 25

ΕΚΠ = d1( d10,2 ) ≠ 0 αφού d1 > 0, 2

Η εξίσωση γίνεται d1( d10,2 )  + d1( d10,2 )  = 25 d1( d10,2 ) ή

12(d10,2) + 15 d1 =25 d1( d10,2 )

12d12,4 + 15 d1 = 25 5d1

2532d1 + 2,4 = 0

Δ = 28 > 0 και ρίζες d1 = 1,2 ή d1 = 0,08

Η d1 = 0,08 απορρίπτεται λόγω περιορισμού. Άρα d1 = 1,2 gr/cm3 .

**11.**

Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους

υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω

για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας .

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω x , x > 2 το πλήθος των υπαλλήλων της εταιρείας

Τότε ο κάθε ένας έπρεπε να συσκευάσει  προϊόντα

Λόγω της απουσίας των 2 υπαλλήλων έμειναν x2 υπάλληλοι και ο κάθε ένας συσκεύασε  προϊόντα. Αριθμός που είναι, σύμφωνα με το πρόβλημα, κατά 3 μεγαλύτερος από τον . Συνεπώς έχουμε την εξίσωση  =   3 ΕΚΠ = x(x2) ≠ 0 αφού x > 2

Η εξίσωση γίνεται x(x2)  = x(x2) 3 x(x2)

120(x2) = 120x3x(x2)

120x240 = 120x 3x2 + 6x

3x26x  240 = 0

x22x  80 = 0

Δ = 324 και ρίζες x = 10 ή x = 8

Η x = 8 απορρίπτεται λόγω περιορισμών.

Επομένως οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας είναι 10

**12.**

Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα . Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως λόγω ολισθηρότητας του δρόμου μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km / h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση

ταχύτητα με την οποία διάνυσαν τελικά την απόσταση.

**Προτεινόμενη λύση**

Έστω ότι η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε τελικά το πούλμαν ήταν x km / h ,

x > 10

Τότε η ταχύτητα πριν την μείωση είναι x + 10 km / h .

Ο χρόνος που απαιτείται για τα 210 km με ταχύτητα x km / h είναι

t1 =  ώρες

Ο χρόνος που απαιτείται για τα 210 km με ταχύτητα x + 10 km / h είναι

t2 =  ώρες

Από το πρόβλημα δίνεται ότι t2 = t1  .

Άρα έχουμε την εξίσωση  = ΕΚΠ = 2x ( x + 10) ≠ 0

Η εξίσωση γίνεται 2x (x + 10)  = 2x (x + 10) 2x ( x + 10) 

420 x = 420( x + 10) x ( x + 10)

420 x = 420x + 4200 x2 10x

x2 + 10x 4200 = 0

Δ = 16900 και ρίζες x = 60 ή x = 70 δεκτή η x = 60

Επομένως η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε το πούλμαν είναι 60 km / h