**3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.i)**

Να λύσετε την εξίσωση 4x – 3(2x – 1) = 7x – 42

**Λύση**

4x – 3(2x – 1) = 7x – 42  4x – 6x + 3 = 7x – 42

– 9x = – 45

x = 5

**1.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση 

**Λύση**

  





  

**1.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση 

**Λύση**

  







**1.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση 

**Λύση**

  



  

**2.i)**

Να λύσετε την εξίσωση 2(3x – 1) –3(2x – 1) = 4

**Λύση**

2(3x – 1) –3(2x – 1) = 4  6x – 2 – 6x + 3 = 4

0x = 3 αδύνατη

**2.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση 2x –  = –  + 

**Λύση**

2x –  = –  +   6x – (5 – x) = – 5 + 7x

6x – 5 + x = – 5 + 7x

0x = 0 ταυτότητα, ρίζα της είναι κάθε x

**3.i)**

Να λύσετε την εξίσωση (λ – 1)x = λ – 1, για τις διάφορες τιμές του λ.

**Λύση**

 Όταν λ – 1 = 0, δηλαδή όταν λ = 1.

Η εξίσωση  0x = 0 ταυτότητα, ρίζα της είναι κάθε x

 Όταν λ – 1  0, δηλαδή όταν λ  1.

Η εξίσωση  x =   x = 1

**3.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση (λ – 2)x = λ , για τις διάφορες τιμές του λ.

**Λύση**

 Όταν λ – 2 = 0, δηλαδή όταν λ = 2.

Η εξίσωση  (2 – 2)x = 2  0x = 2 αδύνατη

 Όταν λ – 2  0, δηλαδή όταν λ  2.

Η εξίσωση  x = 

.

**3.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση λ(λ – 1)x = λ – 1 , για τις διάφορες τιμές του λ.

**Λύση**

 Όταν λ(λ – 1) = 0, δηλαδή όταν λ = 0 ή λ – 1 = 0

λ = 0 ή λ = 1.

α) Για λ = 0, η εξίσωση  0(0 – 1)x = 0 – 1

0x = –1 αδύνατη

β) Για λ = 1, η εξίσωση  1(1 – 1)x = 1 – 1

0x = 0 ταυτότητα, ρίζα της

είναι κάθε x

 Όταν λ(λ – 1)  0, δηλαδή όταν λ  0 και λ – 1  0

λ  0 και λ  1

η εξίσωση  x =  = 

**3.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση λ(λ – 1)x = + λ , για τις διάφορες τιμές του λ.

**Λύση**

 Όταν λ(λ – 1) = 0, δηλαδή όταν λ = 0 ή λ – 1 = 0

λ = 0 ή λ = 1

**α)** Για λ = 0, η εξίσωση  0(0 – 1)x = + 0

0x = 0 ταυτότητα, ρίζα της

είναι κάθε x

**β)** Για λ = 1, η εξίσωση  1(1 – 1)x = + 1

0x = 2 αδύνατη

 Όταν λ(λ – 1)  0, δηλαδή όταν λ  0 και λ – 1  0

λ  0 και λ  1

η εξίσωση  x =  =  = 

**4.**

Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση

του σημείου Μ στην ΑΔ, ώστε για τα εμβαδά

= (ΜΔΓ), = (ΜΑΒ) και = (ΜΒΓ) να

ισχύει **:**

**i)**  **ii)** 

**Λύση**

 Εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ 

Άρα   

**i)** Επειδή  η (1)  





Επανερχόμαστε στην ισότητα  











  

**ii)**   









  

**5.**

Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε προς 5 % και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175 € τόκοι.. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

**Λύση**

Έστω  το κεφάλαιο που κατατέθηκε με επιτόκιο 5%,

οπότε 4000 είναι το κεφάλαιο που κατατέθηκε με επιτόκιο 3%

Οι τόκοι που απέδωσε το πρώτο είναι .

Οι τόκοι που απέδωσε το δεύτερο είναι .

Το άθροισμα των τόκων είναι 175 € .

Άρα   





 €.

Επομένως 2750 € τοκίστηκαν προς 5 % και 1250 τοκίστηκαν προς 3 %.

**6.**

Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή **:**

**i)** v = + αt, α0 (ως προς t) **ii)**  =  + (ως προς )

**Λύση**

**i)**

v = + αt  αt = v –  t = 

**ii)**

Περιορισμός **:** R, ,  0

 =  +  = R+ R

– R = R

(– R) = R **(1)**

 Όταν – R = 0, δηλαδή όταν = R

η εξίσωση (1)  0 = R  R = 0 ή = 0 που είναι άτοπο

 Όταν – R  0, δηλαδή όταν R

η εξίσωση (1)   = 

**7.i)**

Να λύσετε την εξίσωση (x – 4) + 2x(x – 4) + (x – 4) = 0

**Λύση**

(x – 4) + 2x(x – 4) + (x – 4) = 0  (x – 4)( + 2x + 1) = 0

(x – 4)(x + 1= 0

x – 4 = 0 ή (x + 1= 0

x = 4 ή x + 1 = 0

x = 4 ή x = –1

**7.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση (x – 2– (2 – x)(4 + x) = 0

**Λύση**

(x – 2– (2 – x)(4 + x) = 0  (x – 2+ (x – 2)(4 + x) = 0

(x – 2)(x – 2 + 4 + x) = 0

(x – 2) (2x + 2) = 0

x – 2 = 0 ή 2x + 2 = 0

x = 2 ή 2x = – 2

x = 2 ή x = –1

**8.i)**

Να λύσετε την εξίσωση x(– 1) –+  = 0

**Λύση**

x(– 1) –+  = 0  x(x –1)(x + 1) –(x – 1) = 0

(x –1) [x(x + 1) –] = 0

(x –1)( + x –) = 0

(x –1)x = 0

x – 1 = 0 ή x = 0

x = 1 ή x = 0

**8.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση (x + 1+ –1 = 0

**Λύση**

(x + 1+ –1 = 0  (x + 1+ (x + 1)(x – 1) = 0

(x + 1)(x + 1 + x – 1) = 0

(x + 1)2x = 0

x + 1 = 0 ή x = 0

x = –1 = 0 ή x = 0

**9.i)**

Να λύσετε την εξίσωση x(x – 2= – 4x + 4

**Λύση**

x(x – 2= – 4x + 4  x(x – 2= (x – 2

x(x – 2– (x – 2= 0

(x – 2(x – 1) = 0

(x – 2= 0 ή x – 1 = 0

x – 2= 0 ή x – 1 = 0

x = 2 ή x = 1

**9.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση (– 4)(x – 1) = (– 1)(x – 2)

**Λύση**

(– 4)(x – 1) = (– 1)(x – 2)  (x – 2)(x + 2)(x – 1) – (x – 1)(x + 1)(x – 2) = 0

(x – 1)(x – 2)[x + 2 – (x + 1)] = 0

(x – 1)(x – 2)(x + 2 –x –1) = 0

(x – 1)(x – 2) = 0

x – 1 = 0 ή x – 2 = 0

x = 1 ή x = 2

**10.i)**

Να λύσετε την εξίσωση – 2– x + 2 = 0

**Λύση**

– 2– x + 2 = 0  (x – 2) – (x – 2) = 0

(x – 2)( – 1) = 0

x – 2 = 0 ή  – 1 = 0

x = 2 ή  = 1

x = 2 ή x = 1 ή x = –1

**10.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση – 2– (2x – 1)(x – 2) = 0

**Λύση**

– 2– (2x – 1)(x – 2) = 0  (x – 2) – (2x – 1)(x – 2) = 0

(x – 2)[ – (2x – 1)] = 0

(x – 2)( – 2x + 1) = 0

(x – 2)(x – 1 = 0

x – 2 = 0 ή (x – 1= 0

x – 2 = 0 ή x – 1= 0

x = 2 ή x = 1

**11.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** x – 10 και – x 0

x1 και x(x – 1)0

x1 και x 0

Η εξίσωση  x(– x) = x – 1

x x(x – 1) – (x – 1) = 0

(x – 1)( – 1) = 0

x – 1 = 0 ή  – 1 = 0

x = 1 ή  = 1

x = 1 ή x = 1 ή x = –1

x = –1 λόγω των περιορισμών

**11.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  + = 0

**Λύση**

Περιορισμοί **:** – 10 και – 2x + 1 0

(x – 1)(x + 1)0 και (x – 10

x – 10 και x + 10

x1 και x –1

Η εξίσωση   +  = 0

 +  = 0

1 +  = 0

x – 1 + 2 = 0

x = –1 αδύνατη λόγω των περιορισμών

**12.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  + = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Ε.Κ.Π = (x – 1)(x + 1) 0 

x – 10 και x + 1 0

x1 και x –1

Η εξίσωση  x + 1 + x – 1 = 2

2x = 2

x = 1 αδύνατη λόγω των περιορισμών

**12.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  –  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Ε.Κ.Π = x(x + 2)0  x 0 και x + 20

x 0 και x – 2

Η εξίσωση   –  = 

3x – 2(x + 2) = x – 4

3x – 2x – 4 = x – 4

0x = 0, ταυτότητα, x με x– 2 και x 0

**12.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** E.K.Π = (x – 2)(x + 2) 0

x – 2 0 και x + 2 0

x 2 και x – 2

Η εξίσωση   = 

1 = 

x – 2 = x

0 = 2 αδύνατη

**12.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Ε.Κ.Π = (x – 1)(x + 1) 0  x – 1 0 και x + 1 0

x1 και x – 1

Η εξίσωση   = 

= , ταυτότητα, x με x– 1 και x 1

**13.**

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το γινόμενό τους.

**Λύση**

Έστω x – 1, x, x + 1 οι ζητούμενοι  (x – 1)x(x + 1) = x – 1 + x + x + 1

x(– 1) – 3x = 0

x(– 1 – 3) = 0

x(– 4) = 0

x(x – 2)(x + 2) = 0

x = 0 ή x – 2 = 0 ή x + 2 = 0

x = 0 ή x = 2 ή x = – 2

 Για x = 0, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι – 1, 0, 1

 Για x = 2, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 1, 2, 3

 Για x = – 2, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι – 3, – 2, – 1

**14.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 5

**Λύση**

 = 5  2x – 3 = 5 ή 2x – 3 = – 5

2x = 8 ή 2x = – 2

x = 4 ή x = – 1

**14.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

 =   2x – 4 = x – 1 ή 2x – 4 = – (x – 1)

x = 3 ή 2x – 4 = – x + 1

x = 3 ή 3x = 5

x = 3 ή x = 

**14.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 2x – 1

**Λύση**

Περιορισμός **:**  Επειδή   0, για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει

και 2x – 1  0  2x  1  x  

 = 2x – 1  x – 2 = 2x – 1 ή x – 2 = – (2x – 1)

– x = 1 ή x – 2 = – 2x + 1

x = – 1 ή 3x = 3

x = – 1 ή x = 1

Λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η x = 1.

**14.iv)**

Να λύσετε την εξίσωση  = x – 2

**Λύση**

Περιορισμός **:**  Επειδή   0, για να έχει νόημα η εξίσωση θα πρέπει

και x – 2  0  x  2

 = x – 2  2x – 1 = x – 2 ή 2x – 1 = – (x – 2)

x = – 1 ή 2x – 1 = – x + 2

x = – 1 ή 3x = 3

x = – 1 ή x = 1

Λόγω του περιορισμού, δεν είναι αποδεκτές, δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη.

**15.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  –  = 

**Λύση**

 –  =   5 + 20 – 3 – 12 = 10

2 = 2

 = 1

x = – 1 ή x = 1

**15.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  –  = 

**Λύση**

 –  =   4 + 2 – 3 + 3 = 3

 = – 2 αδύνατη

**16.i)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 4

**Λύση**

Περιορισμός **:**  3 + x 0  x – 3

 = 4   = 4 ή  = – 4

3 – x = 12 + 4x ή 3 – x = – 12 – 4x

– 5x = 9 ή 3x = – 15

x = –  ή x = – 5

**16.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

 =    –  = 0

( – 1) = 0

 = 0 ή  – 1 = 0

x – 1 = 0 ή  = 1

x – 1 = 0 ή x – 2 = 1 ή x – 2 = – 1

x = 1 ή x = 3 ή x = 1

x = 1 ή x = 3

**B΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.i)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (x + α– (x – β = 2α(α + β) έχει πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

**Λύση**

(x + α– (x – β = 2α(α + β)  + 2αx + – (– 2βx +) = 2+ 2αβ

+ 2αx + – + 2βx –  = 2+ 2αβ

2(α + β)x = + 2αβ + 

2(α + β)x = (α + β  **(1)**

 Όταν α + β 0, η (1)  x = , η λύση της

 Όταν α + β = 0, η (1)  0x = 0 που έχει άπειρες λύσεις

Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση.

**1.ii)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  =  έχει πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

**Λύση**

Περιορισμός **:**  α, β  0

 =   αx –  = βx – 

αx – βx =  – 

(α – β)x = (α – β) (α + β) **(1)**

 Όταν α – β 0, η (1)  x = α + β, η λύση της

 Όταν α + β = 0, η (1)  0x = 0 που έχει άπειρες λύσεις

Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση.

**2.**

Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα α, β, ώστε να έχει λύση η

εξίσωση  –  = 1**;**

**Λύση**

Κατ’ αρχήν πρέπει α και β

 –  = 1  βx – αx = αβ

(β – α)x = αβ **(1)**

 Όταν β – α 0, δηλαδή όταν βα, η (1)  x =  η λύση της

 Όταν β – α = 0, δηλαδή όταν β = α,

η (1)  0x = 0, από τον περιορισμό.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως, η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν α  και β και α ≠ β

**3.**

Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml

διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

**Λύση**

Τα 200 ml οινόπνευμα περιεκτικότητας 15% περιέχουν

 ml οινόπνευμα.

Έστω ότι πρέπει να προσθέσει x ml καθαρό οινόπνευμα.

Το μίγμα, που θα προκύψει, θα είναι x + 200 ml και θα περιέχει

x + 30 ml καθαρό οινόπνευμα

Αλλά τα x +200 ml μίγμα θα είναι 32% περιεκτικότητας σε οινόπνευμα,

άρα το μίγμα θα περιέχει  ml καθαρό οινόπνευμα.

Θα έχουμε, λοιπόν την εξίσωση  









 ml

**4.**

Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με ταχύτητα 100 km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120 km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km **;**

**Λύση**

Έστω ότι σε t ώρες, μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km.

Το αυτοκίνητο Α θα έχει διανύσει διάστημα = 100t km.

Το αυτοκίνητο Β θα έχει διανύσει διάστημα = 120t km.

Οπότε – = 1 km  120t – 100t = 1

20t = 1

t =  h = 60 min = 3min

**5.**

Να λύσετε την εξίσωση  =  για όλες τις τιμές του α.

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Ε.Κ.Π = (x – α)(x + α) 0  x – α0 και x + α 0

x α και x – α

Η εξίσωση   = 

 = 

(= 

+ 2αx + = 

2αx = –  **(1)**

 Όταν α 0, η (1)  x = – 

 Όταν α = 0, η (1)  0x = 0 ταυτότητα, έχει λύση κάθε

x με x α και x ≠ –α δηλαδή

x με x 0

**6.**

Να λύσετε την εξίσωση  =  + 4

**Λύση**

Περιορισμός **:** x – 20  x 2

Η εξίσωση   =  + 4   =  + 4

 + 2x + 4 =  + 4

2x = 0

x = 0

**7.**

Να λύσετε την εξίσωση │2 – 1│= 3

**Λύση**

│2 – 1│= 3  2 – 1 = 3 ή 2 – 1 = – 3

2 = 4 ή 2 = – 2

 = 2 ή  = – 1 αδύνατη

x = 2 ή x = – 2

**8.**

Να λύσετε την εξίσωση  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Πρέπει – 2x + 1  0 

(x – 1 0, που ισχύει για κάθε x

Η εξίσωση  = 

 = 

x – 1 = 3x – 5 ή x – 1 = – (3x – 5)

– 2x = – 4 ή x – 1 = – 3x + 5

x = 2 ή 4x = 6

x = 2 ή x = 

**3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ xν = α**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** ****–125 = 0 **ii)** – 243 = 0  **iii) **– 1 = 0

**Λύση**

**i)**

****–125 = 0  ****– **=** 0  **** = ****  x = 5

**ii)**

– 243 = 0  –  = 0   =   x = 3

**iii)**

****– 1 = 0  **=**   x = 1

**2.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** **+** 125 = 0 **ii)** + 243 = 0  **iii) +** 1 = 0

**Λύση**

**i)**

**+** 125 = 0  **+ =** 0  **** =–****  ****= (–5  x = –5

**ii)**

+ 243 = 0  + = 0   = –   = (–3  x = –3

**iii)**

**+** 1 = 0  **=** –  **=** (–1  x = –1

**3.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** ****–64 = 0 **ii)** – 81 = 0  **iii) **– 64 = 0

**Λύση**

**i)**

****–64 = 0  ****=64  **= **  x = 8 ή x = –8

**ii)**

– 81 = 0  = 81  =   x = 3 ή x = –3

**iii)**

****– 64 = 0  ****= 64  **= **  x = 2 ή x = –2

**4.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** – 8**** = 0 **ii)** + x = 0  **iii) **+ 16x = 0

**Λύση**

**i)**

– 8**** = 0 ****(****– 8) = 0

**=** 0 ή ****– 8 = 0

x = 0 ή **=**  

x = 0 ή x = 2

**ii)**

+ x = 0  x (**+** 1) = 0

x = 0 ή + 1 = 0

x = 0 ή = –1

x = 0 ή = (–1

x = 0 ή x = –1

**iii)**

****+ 16x = 0  x (+ 16) = 0

x = 0 ή + 16 = 0

x = 0

**5.**

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 81  και διαστάσεις x, x και 3x.

Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

**Λύση**

x.x.3x = 81   = 27  x =  = 3

Επομένως οι διαστάσεις είναι 3, 3, 9

**6.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** (x + 1= 64 **ii)** 1 + 125= 0 **iii)** (x – 1– 27(x – 1) = 0

**Λύση**

**i)**

(x + 1= 64  (x + 1=   x + 1 = 4  x = 3

**ii)**

1 + 125= 0  125= –1

= –1

(5x= (–1

5x = –1  x = –

**iii)**

(x – 1– 27(x – 1) = 0  (x – 1) [(x – 1 –27] = 0

x – 1 = 0 ή (x – 1 – 27 = 0

x = 1 ή (x – 1 = 27

x = 1 ή (x – 1 = 

x = 1 ή x – 1 = 3

x = 1 ή x = 4

**3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** 2****–5x + 3 = 0 **ii)** ****–6x + 9 = 0 **iii)** 3**+** 4x + 2= 0

**Λύση**

**i)**

Δ = 25 – 24 = 1, x =  =  ή 1  x =  ή 1

**ii)**

Δ = 36 – 36 = 0, x =  = –  = 3 (διπλή ρίζα)

**iii)**

Δ = 16 – 24 = – 8 < 0, η εξίσωση είναι αδύνατη.

**2.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** ****–1,69 = 0 **ii)** 0,5****–x = 0 **iii)** 3**+** 27 = 0

**Λύση**

**i)**

****–1,69 = 0  ****=1,69  ** =** (1,3  x = 1,3 ή x = –1,3

**ii)**

0,5****–x = 0  x(0,5x – 1) = 0  x = 0 ή 0,5x – 1 = 0

x = 0 ή 0,5x = 1

x = 0 ή x = 2

**iii)**

Η εξίσωση γράφεται 3**+** 0x +27 = 0

Δ = – 4. 3 . 27 = – 324 < 0, η εξίσωση είναι αδύνατη

**3.i)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση λ**+** 2x – (λ – 2) = 0, λ0 έχει πραγματικές ρίζες.

**Λύση**

Δ = 4 + 4λ(λ – 2) = 4 + 4– 8λ

= 4(– 2λ +1)

= 4(λ – 1  0.

Άρα, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα (όταν Δ = 0) ή δύο πραγματικές

ρίζες (όταν Δ > 0)

**3.ii)**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση α**+** (α + β)x + β = 0, α0 έχει πραγματικές ρίζες.

**Λύση**

Δ = (α + β– 4αβ = + 2 + – 4

= – 2 + 

= (α – β  0.

Άρα, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα (όταν Δ = 0) ή δύο πραγματικές

ρίζες (όταν Δ > 0)

**4.**

Να βρείτε τις τιμές του μ, για τις οποίες η εξίσωση μ**+** 2x + μ = 0, μ0 έχει διπλή ρίζα.

**Λύση**

Καταρχήν θα πρέπει να είναι μ0, ώστε η εξίσωση να είναι 2ου βαθμού και έτσι να υπάρχει η δυνατότητα να έχει διπλή ρίζα.

H εξίσωση έχει διπλή ρίζα  Δ = 0

4 – 4μμ = 0

4 – 4= 0

 = 1  μ = 1 ή μ = –1

**5.**

Αν αβ, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο  η εξίσωση

(+)**+** 2(α + β)x + 2 = 0. Να εξετάσετε την περίπτωση

που είναι α = β

**Λύση**

Η περίπτωση αβ

**** Όταν +0, δηλαδή όταν ένας τουλάχιστον από τους α, β  0,

η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, οπότε

Δ = 4 – 8 (+) = 4(+ 2 + ) – 8– 8

= 4+ 8 + 4– 8– 8

= – 4+ 8 – 4

= – 4(– 2 + )

= – 4 < 0, αφού αβ

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

**** Όταν += 0, δηλαδή όταν α = 0 και β = 0, με αντικατάσταση η

εξίσωση γίνεται 2 = 0 που είναι αδύνατη.

Η περίπτωση α = β

**** Αν μεν α = β = 0, όπως είδαμε η εξίσωση γίνεται 2 = 0 που είναι

αδύνατη

**** Αν δε α = β0 , με αντικατάσταση η εξίσωση γίνεται

(+)**+** 2( + )x + 2 = 0

2**+** 4x + 2 = 0

**+** 2x + 1 = 0, 2ου βαθμού αφού α0

Δ = 4– 4 = 0, άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

**6.**

Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

**i)** 2 και 3 **ii)** 1 και  **iii)** 5 – 2 και 5 + 2

**Λύση**

**i)**

S = 2 + 3 = 5, P = 2. 3 = 6, η εξίσωση είναι ****–5x + 6 = 0

**ii)**

S = 1 +  = , P = 1.  = , η εξίσωση είναι ****–x +  = 0

2****– 3x + 1 = 0

**iii)**

S = 5 – 2 + 5 + 2 = 10, P = (5 – 2)(5 + 2) = 25 – 24 = 1

H εξίσωση είναι ****– 10x + 1 = 0

**7.**

Να βρείτε δύο αριθμούς , εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

**i)** άθροισμα 2 και γινόμενο –15

**ii)** άθροισμα 9 και γινόμενο 10

**Λύση**

**i)**

Οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης – Sx + P = 0,

όπου S = 2 και P = –15 – 2x – 15 = 0

Δ = 4 + 60 = 64, x =  = 5, –3

**ii)**

Οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης – Sx + P = 0,

όπου S = 9 και P = 10 – 9x + 10 = 0

Δ = 81 – 40 = 41, x =  = , 

**8.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** – (+)x +  = 0 **ii)** + (– 1)x – = 0

**Λύση**

**i)**

S = + και P =  = 

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι , 

**ii)**

Δ = (– 1+ 4 = – 2+ 1 + 4

= + 2+ 1

= (+ 1

x =  =  ή 

=  ή 

= 1 ή –

**9.**

Να λύσετε την εξίσωση + = – 2x, για τις διάφορες τιμές των α, β

**Λύση**

+ = – 2x  + 2x +– = 0

Δ = 4– 4(– ) = 4– 4+ 4 = 4

x =  =  =  ή 

**10.**

Να βρείτε τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68 cm και

διαγώνιο 26 cm.

**Λύση**

Έστω x, y οι πλευρές του ορθογωνίου.

2x + 2y = 68 και + = 

x + y = 34 και + = 676

y = 34 – x και + (34 – x= 676

+ – 2⋅ 34 x + – 676 = 0

2– 68 x + 1156 – 676 = 0

2– 68 x + 480 = 0

– 34 x + 240 = 0

Δ = – 4⋅ 240 = 1156 – 960 = 196

x =  =  =  ή  = 24 ή 10

Από την εξίσωση y = 34 – x θα έχουμε y = 10 ή 24.

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 24 και 10

**11.**

Να λύσετε τις εξισώσεις

**i)** – 7 + 12 = 0 **ii)** + 2 – 35 = 0 **iii)** – 8 + 12 = 0

**Λύση**

**i)**

– 7 + 12 = 0  – 7 + 12 = 0

Δ = 49 – 48 = 1,  =  = 4 ή 3 

x = 4 ή – 4 ή 3 ή –3

**ii)**

+ 2 – 35 = 0   + 2 – 35 = 0

Δ = 4 + 140 = 144,  =  = 5 ή –7 απορρίπτεται αφού   0.

x = 5 ή –5

**iii)**

– 8 + 12 = 0  – 8 + 12 = 0

Δ = 64 – 48 = 16,  =  = 6 ή 2 

x = 6 ή – 6 ή 2 ή –2

**12.**

Να λύσετε την εξίσωση (x – 1+ 4 –5 = 0

**Λύση**

(x – 1+ 4 –5 = 0  + 4 –5 = 0

Δ = 16 + 20 = 36,  =  = 1 ή –5 απορρίπτεται αφού   0.

= 1  x – 1 = 1 ή x – 1 = –1

x = 2 ή x = 0

**13.**

Να λύσετε την εξίσωση – 5 + 6 = 0

**Λύση**

Περιορισμός **:** x0

Θέτουμε  = y **(1)**, οπότε η εξίσωση γίνεται – 5y + 6 = 0

Δ = 25 – 24 = 1, y =  = 3 ή 2

 Για y = 3, η (1)   = 3

+ 1 = 3x

– 3x + 1 = 0

Δ΄ = 9 – 4 = 5, x = 

 Για y = 2, η (1)   = 2

+ 1 = 2x

– 2x + 1 = 0

Δ΄΄ = 4 – 4 = 0, x =  = 1

**14.i)**

Να λύσετε την εξίσωση +  = 

**Λύση**

Περιορισμοί **:** x0 και x –1

+  =   6+ 6(x + 1= 13x(x + 1)

6+ 6(+ 2x + 1) = 13+ 13x

6+ 6+ 12x + 6 –13– 13x = 0

–– x + 6 = 0

+ x – 6 = 0

Δ = 1 + 24 = 25, x =  = 2 ή –3

**14.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση +  +  = 0

**Λύση**

Περιορισμοί **:** Είναι – 2x = x(x – 2)

E.K.Π = x(x – 2) 0  x0 και x 2

+  +  = 0  2(x – 2) + x(2x – 3) + 2 – = 0

2x – 4 + 2– 3x + 2 – = 0

– x – 2 = 0

Δ = 1 + 8 = 9, x =  = –1 ή 2 απορρίπτεται , άρα x = –1

**15. i)**

Να λύσετε την εξίσωση + 6– 40 = 0

**Λύση**

+ 6– 40 = 0  (+ 6– 40 = 0

Δ = 36 + 160 = 196,  =  =  = 4 ή –10 απορρίπτεται

 = 4  x = 2 ή x = –2

**15. ii)**

Να λύσετε την εξίσωση 4+ 11– 3 = 0

**Λύση**

4+ 11– 3 = 0  4(+ 11– 3 = 0

Δ = 121 + 48 = 169,  =  =  =  ή –3 απορρίπτεται

 =   x =  ή x = –

**15. ii)**

Να λύσετε την εξίσωση 2+ 7+ 3 = 0

**Λύση**

2+ 7+ 3 = 0  2(+ 7+ 3 = 0

Δ = 49 – 24 = 25,  =  = – ή –3 απορρίπτονται αφού  0

**Β΄ OΜΑΔΑΣ**

**1.**

Δίνεται η εξίσωση – 2x + – 1 = 0, με 0.

**i)** Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι Δ = 4.

**ii)** Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι  και 

**Λύση**

**i)**

Δ = (2– 4(– 1) = 4– 4+ 4 = 4

**ii)**

x =  =  =  = 

**2.**

Δίνεται η εξίσωση – (5 – )x + 6 – 3 = 0

**i)** Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι Δ = (1 + 

**ii)** Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και 2 –

**Λύση**

**i)**

Δ = (5 –– 4(6 –3 ) = 25 – 10 + 2 – 24 + 12

= 3 + 2

= 2 + 1 + 2

= + + 2

= (1 + 

**ii)**

x =  =  ή 

=  ή 

= 3 ή 

= 3 ή 2 –

**3.**

Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση

2+ (– 9)x + + 3 + 4 = 0 έχει διπλή ρίζα.

**Λύση**

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα  Δ = 0

(– 9– 8(+ 3 + 4) = 0

– 18 + 81 – 8– 24 – 32 = 0

–7– 42 + 49 = 0

+ 6 – 7 = 0

Δ΄ = 36 + 28 = 64,  =  = 1 ή –7

**4.**

Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης α+ βx +γ = 0, με α.γ0, να δείξετε ότι ο αριθμός  είναι η ρίζα της εξίσωσης γ+ βx + α = 0.

**Λύση**

ρ ρίζα της εξίσωσης α+ βx +γ = 0  α+ βρ + γ = 0

(διαιρούμε τα δύο μέλη με ) α + β + γ  = 0

α + β + γ= 0

Δηλαδή ο αριθμός  επαληθεύει την εξίσωση γx2 + βx + α = 0,

άρα είναι ρίζα της.

**5.i)**

Να λύσετε την εξίσωση x + =  + , 0

**Λύση**

Περιορισμός **:** x 0

x + =  +   + x = x + 

+ x –x – = 0

+ (1 – ) x – = 0

Δ = (1 – + 4

= 1 – 2 + + 4

= 1 + 2 +  = (1 + 

 =  =  ή 

=  ή – 

**5.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση  +  =  + , α, β0

**Λύση**

Περιορισμός **:** x 0

 +  =  +   β+ β = x + x

β– ( + ) x +β = 0

Δ = ( + – 4 = (+ 2+ (– 4

= (– 2+ (

= (– 

x =  =  ή 

=  ή 

=  ή β

**6.**

Δίνεται η εξίσωση + 2λx – 8 = 0.

**i)** Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε λ.

**ii)** Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης,

τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

**Λύση**

**i)**

Δ = 4+ 32 > 0 για κάθε λ,

άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε λ.

**ii)**

Έστω ,  οι ρίζες της εξίσωσης με  =  **(1)**

Αλλά  +  = –2λ **(2)** και  = – 8 **(3)** από Vieta

(3)   = – 8   = – 8   = –2

(1)  (–2 =    = 4

(2)  –2 + 4 = –2λ  2 = –2λ  λ = –1

**7.**

Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

**Λύση**

Έστω x – 1, x, x + 1 διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Πυθαγόρειο **:** (x + 1= + (x – 1  + 2x + 1 = + – 2x + 1

– + 4x = 0

–x (x – 4) = 0

x – 4 = 0 αφού x0

x = 4

Επομένως υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου,

και είναι οι 4 – 1 , 4, 4 + 1, δηλαδή οι 3, 4, 5

**8.**

Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις

4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε το πλάτος

d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του

είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της

σημαίας.

**Λύση**

Περιορισμός **:** 0 < d < 3

εμβαδόν του σταυρού = εμβαδόν οριζόντιας λωρίδας +

εμβαδόν κατακόρυφης λωρίδας –

εμβαδόν του τετραγώνου ΖΙΜΟ πλευράς d

= 4d + 3d – 

= 7d –  **(1)**

Αλλά, εμβαδόν του σταυρού = εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας. 

εμβαδόν του σταυρού =  εμβαδού της όλης σημαίας

=  4. 3 = 6 **(2)**

Από τις (1), (2)  7d – 3= 6

– 7d + 6 = 0

Δ = 49 – 24 = 25, d =  = 1 ή 6 απορρίπτεται, άρα d = 1

**9.**

Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δύο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα

Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δύο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε

το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

**Λύση**

Αν t είναι o χρόνος που χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο, ο αντίστοιχος χρόνος για το είναι t + 12.

Σε 1 ώρα, το Α θα εκτελέσει το  του έργου και

το Β θα εκτελέσει το  του έργου

Σε 8 ώρες, που τα δυο μαζί τελειώσουν το έργο,

το Α θα εκτελέσει το 8. του έργου και

το Β θα εκτελέσει το 8. του έργου

Άρα θα έχουμε 8. + 8. = 1

8(t + 12) + 8t = t(t + 12)

8t + 96 + 8t = + 12t

– 4t – 96 = 0

Δ = 16 + 4. 96 = 16 + 384 = 400

t =  =  = 12 ή – 8 απορρίπτεται αφού t  0

**10.**

Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης – 10+ α = 0 είναι ο αριθμός 1.

Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.

**Λύση**

Η ρίζα επαληθεύει την εξίσωση. Άρα – 10. + α = 0

1 – 10 + α = 0

α = 9

Η εξίσωση γίνεται (–10+ 9 = 0

Δ = 100 – 36 = 64,  =  = 9 ή 1 

x = 3 ή –3 ή 1 ή –1

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Ι.**

**Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.**

|  |
| --- |
| **1.** Η εξίσωση (α1)x = α(α1) = 0 έχει μοναδική λύση την x = α Α |
| **2.** Η εξίσωση (|x| + 1)(|x| + 2) = 0 είναι αδύνατη Ψ |
| **3.** Η εξίσωση (|x|1)(|x|2) = 0 έχει δύο πραγματικές ρίζες Α |
| **4.** Η εξίσωση (|x|1)(|x| + 2) = 0 έχει δύο πραγματικές ρίζες Ψ |
| **5.** Η εξίσωση |x| = x2 έχει μοναδική λύση Α |
| **6.** Η εξίσωση |x| = 2x έχει μοναδική λύση Ψ |
| **7.**  Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης αx2 + βx + γ = 0 Ψ  είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες |
| **8.** Αν δύο εξισώσεις 2ου  βαθμού έχουν ίδιες ρίζες, τότε οι Ψ  συντελεστές των ομοίων δυνάμεων του x είναι ίσοι |
| **9.** Η εξίσωση αx2 + 2xα = 0 έχει δύο ρίζες Α  πραγματικές και άνισες |
| **10.** Η εξίσωση x24αx + 4α2 = 0 με α 0 έχει Α  δύο ρίζες πραγματικές και άνισες |
| **11.** Η εξίσωση α2x22αx + 2 = 0 με α0 δεν έχει Ψ  πραγματικές ρίζες |
| **12.** Η εξίσωση 2x2 + 3αx + α2 = 0 δεν έχει πραγματικές ρίζες Α |
| **13.** Η εξίσωση  με α  0 , 1 έχει δύο Α  πραγματικές ρίζες άνισες και αντίστροφες |
| **14.** Οι εξισώσεις  και x23x + 2 =0 Α  έχουν τις ίδιες ρίζες |
| **15.** Οι εξισώσεις  και (2x2 + 3x + 1) = 5(x21) Α  έχουν τις ίδιες ρίζες |
| **16.** Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα Ψ  S =10 και γινόμενο Ρ = 16 |
| **17.** Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα Ψ  S = 10 και γινόμενο Ρ = 25 |
| **18.** Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα Α  S = 2 και γινόμενο Ρ = 2 |

**ΙΙ .**

**Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω ισχυρισμούς :**

**1.** Η εξίσωση (2x1)(x + 2) = (32x)(x + 2) γράφεται ισοδύναμα :

(2x1)(x + 2) = (32x)(x + 2)  2x1 = 32x

4x = 4

x = 1

Όμως και ο αριθμός x = 2 επαληθεύει την δοθείσα εξίσωση.

**Απάντηση :** Η πρώτη ισοδυναμία δεν ισχύει, διότι έγινε απλοποίηση με το

x + 2 το οποίο δεν είναι 0 για κάθε x.

**2.** Η εξίσωση |2x1| = x2 γράφεται ισοδύναμα :

|2x1| = x2  2x1 = x2 ή 2x1 = x + 2  x = 1 ή x =

Όμως καμία από τις τιμές αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση

**Απάντηση :** Δεν ισχύει η πρώτη ισοδυναμία. Θα πρέπει να είναι x2  0