**4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.i)**

Να λύσετε την ανίσωση +  < 

**Λύση**

+  <   6(x – 1) + 3(2x + 3) < 2x

6x – 6 + 6x + 9 < 2x

10x < –3  x < 

**1.ii)**

Να λύσετε την ανίσωση +  + > x

**Λύση**

+  + > x  2(x – 12) + 2x + 3 > 4x

2x – 24 + 2x + 3 > 4x

0x > 21  0 > 21 αδύνατη

**1.iii)**

Να λύσετε την ανίσωση +  <  – 

**Λύση**

+  <  –   5(x – 2) + 2(1 – 2x) < x – 4

5x – 10 + 2 – 4x < x – 4

0x < 4 αληθεύει για κάθε x

**2.**

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

3x – 1 < x + 5 και 2 –   x + 

**Λύση**

3x – 1 < x + 5  2x < 6  x < 3

2 –   x +   4 – x  2x + 1  –3x  –3  x  1



Συναλήθευση 1  x < 3

**3.**

Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις :

x –  > + 1 και x –  – 1

**Λύση**

x –  > + 1  2x – 1 > x + 2  x > 3

x –  – 1  3x – 1  x – 3  2x  –2  x  –1



Οι ανισώσεις δε συναληθεύουν

**4.**

Να βρείτε τα x για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις :

2x –  > x και x – 4 +  < 0

**Λύση**

2x –  > x  16x – x + 1 > 8x  7x > –1  x > 

x – 4 +  < 0  2x – 8 + x + 1 < 0  3x < 7  x < 



Συναλήθευση  < x < 

Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα  είναι οι 0, 1, 2.

**5.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)**  < 3 **ii)**   4 **iii)**  < 5

**Λύση**

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

 < ρ  – ρ < x < + ρ

 < ρ  – ρ < x < ρ

**i)**

 < 3  –3 < x < 3

**ii)**

  4  1 – 4  x 1 + 4

–3  x  5

**iii)**

 < 5  – 5 < 2x + 1 < 5

– 5 – 1 < 2x < 5 – 1

– 6 < 2x < 4  –3 < x < 2

**6.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)**   3 **ii)**  > 4 **iii)**   5

**Λύση**

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

 > ρ  x < – ρ ή x > + ρ

 > ρ  x < – ρ ή x > ρ

**i)**

  3  x ≤ –3 ή x ≥ 3

**ii)**

 > 4  x – 1 < – 4 ή x – 1 > 4

x < –3 ή x > 5

**iii)**

  5  2x + 1  –5 ή 2x + 1  5

2x  – 6 ή 2x  4  x  –3 ή x  2

**7.**

Να λύσετε τις εξισώσεις :

**i)**  = 2x – 6 **ii)** = 1 – 3x

**Λύση**

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

  

**i)**

 = 2x – 6  2x – 6  0

2x  6

x  3

**ii)**

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

  

= 1 – 3x  = – (3x – 1)

3x – 1  0

3x  1  x  

**8.i)**

Να λύσετε την ανίσωση  +  < 

Σαν άγνωστο βλέπουμε

το 

**Λύση**

 +  <   3(– 4) + 10 < 2

3 – 12 + 10 < 2

3 – 12 + 10 < 2

 < 2

– 2 < x – 1 < 2  –1 < x < 3

**8.ii)**

Να λύσετε την ανίσωση  –  > 

Σαν άγνωστο βλέπουμε

το 

**Λύση**

 –  >   3(+ 1) – 4 > 2(1 – )

3+ 3 – 4 > 2 – 2

 > –1  x

**9.**

Να λύσετε την ανίσωση   5

**Λύση**

Θυμόμαστε = 

  5    5

  5

–5  x – 3  5  –2  x  8

**10.**

Να βρείτε την ανίσωση της μορφής  < ρ, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος (–7, 3).

**Λύση**

x(–7, 3)  – 7 < x < 3 **(1)**

 < ρ  – ρ < x < + ρ **(2)**

Από τις (1), (2) θα πρέπει   



Η  < ρ γίνεται  < 5

 < 5

**11.**

Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου  με τους βαθμούς Φαρενάϊτ  είναι η F = C + 32. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41ο F μέχρι 50ο F. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ο C.

**Λύση**

Από τις υποθέσεις δίνεται 41  F < 50 

41  C + 32  50

41 – 32  C  50 – 32

9  C  18

5  C  10

**Β΄ OΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

**i)** 3  4x – 1  6 **ii)** – 4  2 – 3x  –2

**Λύση**

**i)**

3  4x – 1  6  3 + 1  4x  6 + 1

4  4x  7

1  x  

**ii)**

– 4  2 – 3x  –2  – 4 – 2  –3x – 2 – 2

Η διαίρεση με αρνητικό αριθμό αλλάζει τη φορά της ανίσωσης

– 6  –3x – 4

2  x  

  x  2

**2.**

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

**i)** 2    4 **ii)** 2    4

**Λύση**

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

 > ρ  x < – ρ ή x > ρ

 < ρ  – ρ < x < ρ

**i)**

2      2

x  –2 ή x  2 **(1)**

  4  – 4  x  4 **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2)

– 4  x  –2 ή 2  x  4

**ii)**

2      2

x – 5  –2 ή x – 5  2

x  3 ή x  7 **(3)**

  4  – 4  x – 5  4

– 4 + 5  x 4 + 5

1  x  9 **(4)**



Συναλήθευση των (3), (4)

1  x  3 ή 7  x  9

**3.**

Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς –3 και 5 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

**i)** Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

**ii)** Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης    και

να βρείτε τις λύσεις της.

**iii)**  Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

**Λύση**

**i)**

Στο μέσο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός  = 1

**ii)**

Έστω Κ(x) το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της ανίσωσης

    d(x, 5)  d(x, –3)

 = d(α, β)

(KΒ)  (KΑ)

το Κ βρίσκεται δεξιά του μέσου Μ

x  1

**iii)**

 = 

      

(x – 5 (x + 3

Η διαίρεση με αρνητικό

αριθμό αλλάζει τη φορά

της ανίσωσης

– 10x + 25  + 6x + 9

–16x  –16  x  1

**4.**

Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

**i)** Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

**ii)** Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης  +  = 6

και να βρείτε τις λύσεις της.

**iii)**  Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως

συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων x – 1 και x – 7.

**Λύση**

**i)**

Στο μέσο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός  = 4

**ii)**

Έστω Κ(x) το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της εξίσωσης

 = d(α, β)

 +  = 6  d(x, 1) + d(x, 7) = 6

(ΚΑ) + (ΚΒ) = 6 (αλλά (ΑΒ) = 7 – 1 = 6)

(ΚΑ) + (ΚΒ) = (ΑΒ)

το Κ ανήκει στο τμήμα ΑΒ

1  x  7

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1 7 |
| x – 1 | – 0 + + |
| x – 7 | – – 0 + |

**iii)**

 Όταν x < –1

 +  = 6  – (x – 1) + [– (x – 7)] = 6

– x + 1 – x + 7 = 6

– 2x = –2  x = 1 άτοπο, αφού x < –1

 Όταν 1  x < 7

 +  = 6  (x – 1) + [– (x – 7)] = 6

x – 1 – x + 7 = 6

6 = 6 , που ισχύει για κάθε 1  x < 7

 Όταν x  7

 +  = 6  (x – 1) + (x – 7) = 6

x – 1 + x – 7 = 6

2x = 14  x = 7 , που ισχύει για x = 7

Τελικά 1  x  7

**4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

**i)** – 3x + 2 **ii)** 2– 3x – 2

**Λύση**

**i)**

Δ = (–3– 4. 1 . 2 = 9 – 8 = 1 > 0

Ρίζες: x =  =  =  ή  = 2 ή 1

Άρα – 3x + 2 = 1.(x – 2)(x – 1) = (x – 2)(x – 1)

**ii)**

Δ = (–3– 4. 2 . (–2) = 9 + 16 = 25 > 0

Ρίζες: x =  =  =  ή  = 2 ή –

Άρα 2– 3x – 2 = 2(x – 2) = (x – 2)(2x + 1)

**2.i**

Να απλοποιήσετε την παράσταση: ****

**Λύση**

Περιορισμός 2– 3x – 2 0

 Για το τριώνυμο Α = – 3x + 2

Δ = (–3– 4. 1 . 2 = 9 – 8 = 1 > 0

Ρίζες: x =  =  =  ή  = 2 ή 1

Άρα – 3x + 2 = 1.(x – 2)(x – 1) = (x – 2)(x – 1)

 Για το τριώνυμο Π = 2– 3x – 2

Δ = (–3– 4. 2 . (–2) = 9 + 16 = 25 > 0

Ρίζες: x =  =  =  ή  = 2 ή –

Άρα 2– 3x – 2 = 2(x – 2) = (x – 2)(2x + 1)

Ο περιορισμός γίνεται 2(x – 2) 0  x – 2 0 και x + 0

x 2 και x –

Τελικά ** =  = **

**2.ii**

Να απλοποιήσετε την παράσταση: ****

**Λύση**

Όπως στη (2i), θα είναι ** =  = **

με περιορισμό x –7 και x7

**2.iii**

Να απλοποιήσετε την παράσταση: ****

**Λύση**

Περιορισμός 2– 5x + 3 0

 Για το τριώνυμο Α = 4– 12x + 9

Δ = (–12– 4. 4 . 9 = 144 – 144 = 0

Διπλή ρίζα x = –= – = 

Άρα 4– 12x + 9 = 4 = = (2x – 3

 Για το τριώνυμο Π = 2– 5x + 3

Δ = (–5– 4. 2 . 3 = 25 – 24 = 1 > 0

Ρίζες: x =  =  =  ή  =  ή 1

Άρα 2– 5x + 3 = 2(x – 1) = (2x – 3)(x – 1)

Ο περιορισμός γίνεται 2(x – 1) 0  x – 1 0 και x –0

x 1 και x 

Τελικά ** =  = **

**3.**

Για τις διάφορες τιμές του x, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

**i)**  – 2x – 15 **ii)** 4– 4x + 1  **ii)** – 4x + 13

**Λύση**

**i)**

Δ = (–2– 4. 1. (–15) = 4 + 60 = 64 > 0

Ρίζες: x =  =  = 5 ή –3

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | –3 5 + |
| – 2x – 15 | + 0 – 0 + |

**ii)**

Δ = (– 4– 4. 4. 1 = 16 – 16 = 0

Διπλή ρίζα x = –= – = 

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1/2 + |
| 4– 4x + 1 | + 0 + |

**iii)**

Δ = (– 4– 4. 1. 13 = 16 – 52 = –36 < 0

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | + |
| – 4x + 13 | + |

**4.**

Για τις διάφορες τιμές του x, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

**i)** –+ 4x – 3 **ii)** –**9**+ 6x –1 **iii)** –+ 2x – 2

**Λύση**

**i)**

Δ = – 4(–1). (–3) = 16 – 12 = 4 > 0

Ρίζες: x =  =  = 3 ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1 3 + |
| –+ 4x – 3 | – 0 + 0 – |

**ii)**

Δ = – 4(–9). (–1) = 36 – 36 = 0

Διπλή ρίζα x = –= – = 

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1/3 + |
| –9+ 6x – 1 | – 0 – |

**iii)**

Δ = – 4. (–1)( –2) = 4 – 8 – 4 < 0

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | + |
| –+ 2x – 2 | – |

**5.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)** 5 20x i**i)** +3x  4

**Λύση**

**i)**

5 20x  – 4x  0

Ρίζες του τριωνύμου – 4x = x(x – 4) είναι 0 ή 4

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 4 + |
| – 4x | + 0 – 0 + |

– 4x  0  0  x  4  x[0, 4]

**ii)**

+ 3x  4  + 3x – 4  0

Δ = – 4. 1(–4) = 9 + 16 = 25 > 0

Ρίζες του τριωνύμου +3x – 4 : x =  =  = – 4 ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – 4 1 + |
| + 3x – 4 | + 0 – 0 + |

+ 3x – 4  0  – 4  x  1  x[– 4, 1]

**6.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)** – x – 2 > 0 **ii)** 2– 3x – 5 < 0

**Λύση**

**i)**

Δ = 1 + 8 = 9 > 0 , ρίζες του τριωνύμου – x – 2 : x =  = 2 ή –1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – 1 2 + |
| – x – 2 | + 0 – 0 + |

– x – 2 > 0  x < –1 ή x > 2  x(, –1)(2 , +)

**ii)**

Δ = 9 + 40 = 49 > 0, ρίζες του τριωνύμου 2– 3x – 5 : x =  =  ή –1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | –1 5/2 + |
| 2– 3x – 5 | + 0 – 0 + |

2– 3x – 5 < 0  –1 < x <   x

**7.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)** + 4 > 4x **ii)** + 9  6x

**Λύση**

**i)**

+ 4 > 4x  + 4 – 4x > 0

(x – 2> 0  x με x2

**ii)**

+ 9  6x  + 9 – 6x  0

(x – 3 0

x – 3 = 0  x = 3

**8.**

Να λύσετε τις ανισώσεις :

**i)** + 3x + 5  0 **ii)** 2– 3x + 20 > 0

**Λύση**

**i)**

Δ = 9 – 20 = –11 < 0  το τριώνυμο είναι ομόσημο του α = 1, δηλαδή θετικό

για κάθε x, άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

**ii)**

Δ = 9 – 160 = –151 < 0  το τριώνυμο είναι ομόσημο του α = 2, δηλαδή

θετικό για κάθε x, άρα η ανίσωση αληθεύει

για κάθε x.

**9.**

Να λύσετε την ανίσωση –(– 4x + 3) > 0

**Λύση**

–(– 4x + 3) > 0  – 4x + 3 < 0

Δ = 16 – 12 = 4 > 0 , ρίζες του τριωνύμου – 4x + 3 : x =  = 3 ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1 3 + |
| – 4x + 3 | + 0 – 0 + |

– 4x + 3 < 0  1 < x < 3  x(1, 3)

**10.**

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει 2x – 1 < – 4 < 12

**Λύση**

2x – 1 < – 4 < 12  2x – 1 < – 4 και – 4 < 12

 2x – 1 < – 4  – 2x – 3 > 0

Δ = 4 + 12 = 16 > 0 , ρίζες του τριωνύμου x =  = 3 ή –1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | –1 3 + |
| – 2x – 3 | + 0 – 0 + |

– 2x – 3 > 0  x < –1 ή x > 3 **(1)**

 – 4 < 12  < 16   < 4  – 4 < x < 4 **(2)**



Συναλήθευση των (1), (2)

– 4 < x < –1 ή 3 < x < 4

**11.**

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

– 6x + 5 < 0 και – 5x + 6 > 0.

**Λύση**

 Για την ανίσωση – 6x + 5 < 0

Δ = 36 –20 = 16 > 0 , ρίζες του τριωνύμου x =  = 5 ή 1

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1 5 + |
| – 6x + 5 | + 0 – 0 + |

 – 6x + 5 < 0  1 < x < 5 **(1)**

 Για την ανίσωση – 5x + 6 > 0

Δ = 25 – 24 = 1 , ρίζες του τριωνύμου x =  = 3 ή 2

Πρόσημο του τριωνύμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | 2 3 + |
| – 5x + 6 | + 0 – 0 + |

– 5x + 6 > 0  x < 2 ή x > 3 **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2)

1 < x < 2 ή 3 < x < 5

**Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

**i)** Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

+ – 2 και – – 6

**ii)** Να απλοποιήσετε την παράσταση 

**Λύση**

**i)**

 Για την παράσταση + – 2

Είναι τριώνυμο ως προς α (αντί x)

Δ = – 4. 1. (–2) = + 8 = 9 0

Ρίζες του τριωνύμου  =  =  =  ή –2

Άρα + – 2 = 1(α – β)(α + 2β) **(1)**

 Για την παράσταση – – 6

Είναι τριώνυμο ως προς α (αντί x)

Δ = – 4. 1. (– 6) = + 24 = 25 0

Ρίζες του τριωνύμου  =  =  = 3 ή –2

Άρα – – 6 = 1(α – 3β)(α + 2β) **(2)**

**ii)**

Περιορισμός – – 6 0  α3β και α–2β

   = 

**2.**

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο 2+ (2β – α)x – αβ

**Λύση**

Δ = (2β – α+ 8αβ

= 4– 4αβ + + 8αβ

= 4+ 4αβ +  = (2β + α  0,

x =  =  ή 

=  ή 

=  ή – β

Άρα 2+ (2β – α)x – αβ = 2(x + β)

= (2x – α) (x + β)

**3.**

Να απλοποιήσετε την παράσταση 

**Λύση**

 Για τον αριθμητή που γράφεται – (α – β)x – αβ

Δ = (α – β+ 4αβ

= – 2αβ + + 4αβ

= + 2αβ +  = (α + β 0

x =  =  ή 

=  ή  = α ή – β

Άρα – (α – β)x – αβ = (x – α)(x + β) **(1)**

 Για τον παρανομαστή

Δ = 9 – 8 =   0

x =  = 2α ή α

Άρα – 3αx + 2 = (x – 2α)(x – α) **(2)**

Περιορισμός – 3αx + 2 0  x 2α και x  α

  

**4.**

Δίνεται η εξίσωση λ+ 3λx + λ + 5 = 0, λ. Να βρείτε τις τιμές του λ για

τις οποίες η εξίσωση :

**i)** έχει ρίζες ίσες **ii)** έχει ρίζες άνισες **iii)** είναι αδύνατη

**Λύση**

 Για λ = 0 η εξίσωση γίνεται 5 = 0 αδύνατη **(1)**

 Για λ0 η εξίσωση είναι 2ου βαθμού

**i)**

έχει ρίζες ίσες  Δ = 0

9– 4λ(λ + 5) = 0

9– 4 – 20λ = 0

5 – 20λ = 0

 – 4λ = 0

λ(λ – 4) = 0

λ – 4 = 0 αφού λ0  λ = 4

**ii)**

έχει ρίζες άνισες  Δ > 0

9– 4λ(λ + 5) > 0

9– 4 – 20λ > 0

5 – 20λ > 0

 – 4λ > 0

λ(λ – 4) > 0  λ < 0 ή λ > 4

 Πρόσημο του τριωνύμου  – 4λ

|  |  |
| --- | --- |
| λ | 0 4 + |
| – 4λ | + 0 – 0 + |

**iii)**

είναι αδύνατη  Δ < 0

9– 4λ(λ + 5) < 0

9– 4 – 20λ < 0

5 – 20λ < 0

 – 4λ < 0

λ(λ – 4) < 0  0 < λ < 4 **(2)**

Από τις (1), (2)  η εξίσωση είναι αδύνατη για 0  λ < 4

**5.**

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση + 3λx + λ > 0

αληθεύει για κάθε x.

**Λύση**

+ 3λx + λ > 0 αληθεύει για κάθε x 

το τριώνυμο + 3λx + λ είναι ομόσημο του α = 1 για κάθε x 

Δ < 0 

9– 4λ < 0  Πρόσημο του τριωνύμου 9– 4λ

|  |  |
| --- | --- |
| λ | 0 4/9 + |
| 9- 4λ | + 0 – 0 + |

λ(9λ – 4) < 0 

0 < λ < 

**6.**

Δίνεται το τριώνυμο (λ + 2) – 2λx + 3λ, λ–2.

**i)** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση Δ < 0

**ii)** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση

(λ + 2) – 2λx + 3λ < 0, λ–2

αληθεύει για κάθε x.

**Λύση**

**i)**

Δ = 4– 4(λ + 2). 3λ = 4– 12– 24λ = –8– 24λ

Δ < 0  – 8– 24λ < 0

+ 3λ > 0 Πρόσημο του τριωνύμου  + 3λ

|  |  |
| --- | --- |
| λ | 0 4/9 + |
| 9– 4λ | + 0 – 0 + |

λ(λ + 3) > 0

λ < –3 ή λ > 0

**ii)**

(λ + 2) – 2λx + 3λ < 0 αληθεύει για κάθε x 

[το τριώνυμο (λ + 2) – 2λx + 3λ είναι ομόσημο

του α = λ + 2 για κάθε x και λ + 2 < 0 ] 

Δ < 0 και λ + 2 < 0 

[λ < –3 ή λ > 0 ] και λ < –2  Συναλήθευση

λ < –3

**7.**

Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της

διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου

Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το

άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων

είναι μικρότερο του 5.

**Λύση**

Έστω ΑΕ = x. Τότε ΕΒ = 3 – x = ΜΘ.

Άθροισμα των εμβαδών : Τ = + (3 – x

= + 9 – 6x +

= 2– 6x + 9

Θέλουμε 2– 6x + 9 < 5  2– 6x + 4 < 0 **(1)**

Δ = 36 – 32 = 4 > 0, ρίζες x =  =  = 2 ή 1

Η (1)  1 < x < 2

Εύρεση των ζητούμενων θέσεων του Μ.

Πάνω στην πλευρά ΑΒ τοποθετούμε τα σημεία ,  έτσι ώστε

Α = 1 και Α = 2.

Από τα ,  φέρνουμε κάθετες στην ΑΒ, οι οποίες τέμνουν τη διαγώνιο ΑΓ σε σημεία , .

Οι ζητούμενες θέσεις του Μ είναι τα εσωτερικά σημεία του τμήματος .

**8.**

**i)** Να αποδείξετε ότι –  +  > 0 για όλα τα ,  με , 0.

**ii)** Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης Α = +  – 1 για τις διάφορες

τιμές των , 0.

**Λύση**

**i)**

Πρόκειται για τριώνυμο ως προς α (αντί x)

Δ =  – 4 = –3 < 0  το –  +  είναι ομόσημο του α = 1,

(άρα θετικό) για κάθε , 0.

**ii)**

Α = +  – 1 = 

Επειδή ο αριθμητής είναι θετικός, το πρόσημο του κλάσματος θα είναι ίδιο με το πρόσημο του παρανομαστή .

Επομένως : αν ,  ομόσημοι, τότε Α > 0

αν ,  ετερόσημοι, τότε Α < 0.

**4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου Ρ(x) = (2 –3x)( – x – 2)( – x + 1)

**Λύση**

 2 –3x  0  –3x  –2  x  

 Για το τριώνυμο – x – 2

Δ = 1 + 8 = 9 > 0 Ρίζες : 2 και –1

– x – 2 > 0  x < –1 ή x > 2

 Για το τριώνυμο – x + 1

Δ = 1 – 4 = –3 < 0 Άρα – x + 1 > 0 για κάθε 

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –1 2/3 2 + |
| 2 – 3x | + + 0 – 0 – |
| – x – 2 | + 0 – – 0 + |
| – x + 1 | + + + + |
| P(x) | + 0 – 0 + 0 – |

**2.**

Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου Ρ(x) = (–+ 4)( – 3x + 2)(+ x + 1)

**Λύση**

 Για το τριώνυμο –+ 4

Δ – 0 + 4 = 4 > 0 Ρίζες : 2 και –2

–+ 4 > 0  –2 < x < 2

 Για το τριώνυμο – 3x + 2

Δ = 9 – 8 = 1 > 0 Ρίζες : 1 και 2

– 3x + 2 > 0  x < 1 ή x > 2

 Για το τριώνυμο + x + 1

Δ = 1 – 4 = –3 < 0 Άρα + x + 1 > 0 για κάθε 

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –2 1 2 + |
| –x2 + 4 | – 0 + + 0 – |
| – 3x + 2 | + + 0 – 0 + |
| + x + 1 | + + + + |
| P(x) | – 0 + 0 – 0 – |

**3.**

Να λύσετε την ανίσωση (x – 1)(+ 2)( – 9) > 0

**Λύση**

 x – 1 > 0  x > 1

 + 2 > 0  

 – 9 > 0  x < –3 ή x > 3

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –3 1 3 + |
| x – 1 | – – 0 + + |
| + 2 | + + + + |
| – 9 | + 0 – – 0 + |
| Γινόμενο | – 0 + 0 – 0 + |

Άρα –3 < x < 1 ή x > 3

**4.**

Να λύσετε την ανίσωση (3 – x)(2+ 6x)(+ 3) ≤ 0

**Λύση**

 3 – x > 0  x < 3

 2+ 6x > 0  2x(x + 3) > 0  x(x + 3) > 0  x < –3 ή x > 0

 + 3 > 0  

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –3 0 3 + |
| 3 – x | + + + 0 – |
| 2+ 6x | + 0 – 0 + + |
| + 3 | + + + + |
| Γινόμενο | + 0 – 0 + 0 – |

Άρα –3  x  0 ή x  3

**5.**

Να λύσετε την ανίσωση (2 – x – )(+ 2x + 1)  0

**Λύση**

 Για την ανίσωση 2 – x – > 0  + x – 2 < 0

Δ = 1 + 8 = 9 > 0 Ρίζες : –2 και 1 Άρα –2 < x < 1

 Για την ανίσωση + 2x + 1 > 0  (x + 1> 0  x–1

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –2 –1 1 + |
| 2 – x – | – 0 + + 0 – |
| + 2x + 1 | + + 0 + + |
| Γινόμενο | – 0 + 0 + 0 – |

Άρα x  –2 ή x = –1 ή x  1

**6.**

Να λύσετε την ανίσωση (x – 3)(2+ x – 3)(x – 1 – 2) > 0

**Λύση**

 Για την ανίσωση x – 3 > 0  x > 3

 Για την ανίσωση 2+ x – 3 > 0

Δ = 1 + 24 = 25 > 0 Ρίζες  = 1 ή –

Οπότε 2+ x – 3 > 0  x < – ή x > 1

 Για την ανίσωση x – 1 – 2 > 0  2– x + 1 < 0

Δ = 1 – 8 = –7 < 0

Οπότε x – 1 – 2< 0 για κάθε 

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –3/2 1 3 + |
| x – 3 | – – – 0 + |
| 2+ x – 3 | + 0 – 0 + + |
| x –1 – 2 | – – – – |
| Γινόμενο | + 0 – 0 + 0 – |

Άρα x < – ή 1 < x < 3

**7.**

Να λύσετε τις ανισώσεις

**i)**  > 0 **ii)**   0

**Λύση**

**i)**

Περιορισμός : x + 10  x–1

 > 0  (x – 2)(x + 1)  x < –1 ή x > 2

**ii)**

Περιορισμός : x – 30  x3

  0  (2x + 1)(x – 3)  0  –   x < 3

**8.**

Να λύσετε την ανίσωση   0

**Λύση**

Περιορισμός : + x – 20

Δ = 1 + 8 = 9 > 0 Ρίζες –2 και 1 Άρα x–2 και x1

  0  (– x – 2)(+ x – 2)  0

 Για το τριώνυμο – x – 2

Δ = 1 + 8 = 9 > 0 Ρίζες –1 και 2

– x – 2 > 0  x < –1 ή x > 2

 Για το τριώνυμο + x – 2

+ x – 2 > 0  x < –2 ή x > 1

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –2 –1 1 2 + |
| – x – 2 | + + 0 – – 0 + |
| + x – 2 | + – – + + |
| Γινόμενο | + – 0 + – 0 + |

Άρα –2 < x  –1 ή 1 < x  2

**Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**

**1.**

Να λύσετε τις ανισώσεις

**i)**  > 4 **ii)**   4

**Λύση**

**i)**

Περιορισμός : x – 10  x1

 > 4   – 4 > 0

 > 0

 > 0

(–2x + 7)(x – 1) > 0  1 < x < 

**ii)**

Περιορισμός : 3x + 50 x–

  4   – 4  0

  0

  0

  0

(x + 2)(3x + 5)  0  x –2 ή x > –

**2.**

Να λύσετε την ανίσωση  + 2  0

**Λύση**

Περιορισμός : x – 10  x1

 + 2  0    0

  0

(x – 1)( – x – 12)  0

 Για την ανίσωση x – 1 > 0  x > 1

 Για την ανίσωση – x – 12 > 0

Δ = 1 + 48 = 49 > 0 Ρίζες  = –3 , 4

– x – 12 > 0  x < –3 ή x > 4

Πίνακας προσήμου

|  |  |
| --- | --- |
| x | – –3 1 4 + |
| x – 1 | – – + + |
| – x – 12 | + 0 – – 0 + |
| Γινόμενο | – 0 + – 0 + |

Άρα x  –3 ή 1 < x  4

**3.**

Να λύσετε τις ανισώσεις

**i)**    **ii)**   

**Λύση**

**i)**

Περιορισμός : (3x – 50 και x – 10)  (x  και x1)

     –  0

  0

  0

  0

(x – 2)(x – 5)(3x – 5)(x – 1)  0

x – 1 5/3 2 5 +

γινόμ + – + 0 – 0 +

Άρα 1 < x <  ή 2  x  5

**ii)**

Περιορισμός : (2x – 10 και x + 20)  (x  και x–2)

     –   0

  0

  0

  0

(x – 1)(x – 3)(2x – 1)(x + 2)  0

x – –2 1/2 1 3 +

γινόμ + – + 0 – 0 +

Άρα x < –2 ή < x  1 ή x  3

**4.**

Να λύσετε την ανίσωση  > 2

**Λύση**

Περιορισμός : x0

 > 2   < –2 ή  > 2

 + 2 < 0 ή  –2 > 0

 < 0 ή  > 0

 < 0 ή  > 0

(3x + 1)x < 0 ή (x – 1)x < 0

– < x < 0 ή 0 < x < 1

**5.**

Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης

των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος Κ και τα αντίστοιχα έσοδα Ε (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους Κ = 7 – x και Ε = 5x –. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία

έχει κέρδος.

**Λύση**

Για να έχει κέρδος, πρέπει και αρκεί Ε > Κ

5x – > 7 – x

– 6x + 7 < 0 **(1)**

Δ = 36 – 28 = 8 Ρίζες  =  = 3 – , 3 +

(1)  3 – < x < 3 + σε ευρώ

**6.**

Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείτε ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο σ =  mgr/lt. Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι 4 mgr/lt, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ.

**Λύση**

Θα πρέπει  > 4   > 1 (Ε.Κ.Π = + 4 > 0)

5t > + 4

– 5t + 4 < 0

1 < t < 4

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

**Ι.**

**Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση**

**1.** Αν η ανίσωση x2 + 2x + γ ≥ 0 είναι αδύνατη τότε

Α) γ > Β) γ = γ < Δ) γ ≥

**2.** Αν η ανίσωση x22x + γ > 0 αληθεύει για κάθε , τότε

Α) γ < 1 Β) γ =1 γ >1 Δ) γ ≤ 1

**3.** Αν η ανίσωση 2x2 + 3λx –λ2≤ 0 αληθεύει για κάθε , τότε

Α) λ > 0 Β) λ< 0 Γ) λ = 1 λ = 0

**4.** Η εξίσωση |x1| + |x5| = 4 αληθεύει αν και μόνο αν :

Α) x < 1 Β) x > 5 1 ≤ x ≤ 5 Δ) 1< x < 5

**5.** Η εξίσωση |x1| = x1 :

A) είναι αδύνατη Β) έχει μοναδική λύση την x = 1

έχει άπειρες λύσεις Δ) είναι ταυτότητα

**ΙΙ.**

**Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.**

|  |
| --- |
| **1.** Η ανίσωση x2 + λx + λ2 > 0 , λ  0 αληθεύει Ψ  για κάθε |
| **2.** Η ανίσωση λ2x2 + 4λx + 5 ≤ 0 , λ ≠ 0 αληθεύει Α  για κάθε |
| **3.** Οι ανισώσεις x2(x1) ≥0 και x1 ≥0 έχουν τις Α  ίδιες λύσεις |
| **4.** Οι ανισώσεις x2(x1)  0 και x1 ≤0 έχουν τις Ψ  ίδιες λύσεις |
| **5.** Οι ανισώσεις  και 2x1 > x +1 έχουν τις Α  ίδιες λύσεις |
| **6.** Οι ανισώσεις  και x1  0 έχουν τις Α  ίδιες λύσεις |
| **7.** Οι ανισώσεις  και (x1)(x2)  0 έχουν τις Α  ίδιες λύσεις |
| **8.** Οι ανισώσεις  και (x1)(x2)  0 έχουν τις Α  ίδιες λύσεις |
| **9**. Οι ανισώσεις  και (x1)(x2) < 0 έχουν τις Ψ  ίδιες λύσεις |
| **10.** Οι ανισώσεις  και (x +1)2 < (x1)(x + 2) < 0 Α  έχουν τις ίδιες λύσεις |

**ΙΙΙ.**

**Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της ομάδας Α΄ στην ισοδύναμη μορφή του από την ομάδα Β΄**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Α΄ ΟΜΑΔΑ | | Β΄ ΟΜΑΔΑ | |
| **1** | 2x2 + 6x4 Δ | A | (x1)(x2) |
| **2** | x23x + 2 Α | B | (x1)(x2) |
| **3** | x2 +3x2 Β | Γ | 2(x1)(x2) |
| **4** | 2x26x + 4 Γ | Δ | 2(x1)(x2) |

**IV.**

**Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς**

**1.** Η ανίσωση (2x6)(x1) > 0 ισοδύναμα γράφεται :

(2x6)(x1) > 0  2x6 > 0 και x1 > 0 

x >3 και x > 1  x > 3

Όμως ο αριθμός 0 αν και είναι μικρότερος του 3 επαληθεύει την ανίσωση

**Απάντηση :**

Η πρώτη ισοδυναμία δεν είναι σωστή αφού μπορεί να είναι

« ή 2x6 < 0 και x1 < 0 »

**2.** Η ανίσωση  γράφεται ισοδύναμα :

  x2 < 4  x24 <0  2 < x < 2

Όμως ο αριθμός 1 αν και είναι μεταξύ του 2 και του 2 δεν επαληθεύει την

ανίσωση

**Απάντηση:**

Η πρώτη ισοδυναμία δεν είναι σωστή, ισχύει μόνο αν x > 0, πρέπει να εξεταστεί

και η περίπτωση x < 0

**3.** Η ανίσωση (x + 2)2(x1) ≥ 0 γράφεται ισοδύναμα

(x + 2)2(x1) ≥ 0  x1 ≥ 0  x ≥ 1

Όμως ο αριθμός 2 αν και είναι μικρότερος του 1 επαληθεύει την δοθείσα

ανίσωση

**Απάντηση :**

Δεν ισχύει η πρώτη ισοδυναμία, αφού γίνεται απλοποίηση με το (x + 2)2 ,

το οποίο μπορεί να είναι 0.